Technische Universität München
Fakultät für Physik

Ferienkurs

Experimentalphysik 1

WS 2016/17

Lösung 1

Ronja Berg (ronja.berg@tum.de)
Katharina Scheidt (katharina.scheidt@tum.de)

Aufgabe 1: Superposition

(a) Legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in den Startpunkt des Bootes, sind die Anfangsbedingungen für das Boot $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$. Das Boot hat die Eigengeschwindigkeit $v_x = v_\mathrm{B}$ in x-Richtung und wird gleichzeitig durch die Geschwindigkeit des Flusses $v_y = v_\mathrm{F}$ in y-Richtung abgelenkt. Das Boot erfährt keine Beschleunigung, also ist die Bahnkurve in allgemeiner Form:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\mathrm{B} \cdot t + x_0 \\ v_\mathrm{F} \cdot t + y_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Mit den Anfangsbedingungen $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ wird $\vec{r}$ zu

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_\mathrm{B} \cdot t \\ v_\mathrm{F} \cdot t \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Nach der Zeit $t = t_1$ ist das Boot am gegenüberliegenden Ufer. Wir können t_1 über die Geschwindigkeit des Bootes:

$$t_1 = \frac{b}{v_\mathrm{B}}. \tag{3}$$

Setzen wir die Zeit t_1 in die Bahnkurve in y-Richtung ein, bekommen wir die Ablenkung des Bootes:

$$y(t_1) = v_\mathrm{F} \cdot t_1 = \frac{v_\mathrm{F}}{v_\mathrm{B}} b = 80\mathrm{m}. \tag{4}$$

(b) Jetzt ist die Geschwindigkeit $v_y = v_\mathrm{F} = cx(b-x)$, also ortsabhängig. Da das Boot mit v_B in x-Richtung fährt, ist seine Geschwindigkeit in y-Richtung ebenfalls ortsabhängig und wegen $x = v_\mathrm{B} \cdot t$ auch zeitabhängig:

$$v_F(t) = c \cdot v_\mathrm{B} \cdot t \cdot (b - v_\mathrm{B} \cdot t) \tag{5}$$

Um die Bahnkurve in y-Richtung zu erhalten müssen wir v_F über die Zeit integrieren:

$$y(t) = \int v_F(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}cbv_\mathrm{B}t^2 - \frac{1}{3}cv_\mathrm{B}^2t^3 + y_0. \tag{6}$$

Für y_0 gilt immer noch $y_0 = 0$. Setzen wir nun die Zeit $t_\mathrm{B} = \dfrac{b}{v_\mathrm{B}}$, nachdem das Boot die gegenüberliegende Seite erreicht, für t in $y(t)$ ein, erhalten wir:

$$y(t_\mathrm{B}) = \frac{cb^3}{6v_\mathrm{B}} = 55\mathrm{m}. \tag{7}$$

(c) Das Boot soll jetzt bereits am Anfang schräg fahren, dennoch mit der gleichen Anfangsgeschwindigkeit, wie in (a). Das Boot soll geradeaus über den Fluss fahren. Das bedeutet, dass die y-Komponente der Geschwindigkeit des Bootes, entgegengesetzt gleich groß sein muss, wie die Geschwindigkeit des Flusses. Das bedeutet, dass die Beträge gleich sind:

$$|v_\mathrm{F}| = |v_\mathrm{B,y}|. \tag{8}$$

Daraus folgt für den Winkel:

$$\sin(\alpha) = \frac{v_\mathrm{B,y}}{v_\mathrm{B}} = \frac{0{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0,8 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 53°. \tag{9}$$

Wenn das Boot nicht abgelenkt werden soll, muss also unter einem Winkel 53° zur Ufernormalen entgegen der Bewegungsrichtung des Flusses gesteuert werden.

Aufgabe 2: Kräfte

(a) Zunächst stellen wir die **Zwangsbedingungen** für das System auf: In diesem Fall haben wir zwei Seile, die die Körper miteinander verbinden. Für beide Seile gilt, dass ihre Länge konstant bleibt. Was sich jedoch ändert, wenn die Massen sich bewegen, ist der Abstand zwischen den Massen und den Rollen. Diese Abstände bezeichnen wir mit x_1, x_{2r}, x_{2l} und x_3 (siehe Abbildung). x_{2l} ist der Abstand zwischen m_2 und der *linken* Rolle und x_{2r} der Abstand zwischen m_2 und der *rechten* Rolle. Das Seil zwischen m_1 und m_2 habe die Länge l_{12} und das Seil zwischen m_2 und m_3 die Länge l_{23}. Für das System kann man nun mehrere Zwangsbedingungen aufstellen:

- Die Seillänge l_{12} muss konstant sein:

$$x_1 + x_{2r} = l_{12} \tag{10}$$
$$\Rightarrow \ddot{x}_1 + \ddot{x}_{2r} = 0 \tag{11}$$

- Die Seillänge l_{23} muss konstant sein:

$$x_{2l} + x_3 = l_{23} \tag{12}$$
$$\Rightarrow \ddot{x}_{2l} + \ddot{x}_3 = 0 \tag{13}$$

- Außerdem ist der Abstand zwischen den Rollen konstant, daher ist die Summe der Seillängen zwischen m_2 und den Rollen links und rechts auch konstant:

$$x_{2l} + x_{2r} = l_{22} \tag{14}$$
$$\Rightarrow \ddot{x}_{2l} + \ddot{x}_{2r} = 0 \tag{15}$$

Nun betrachten wir die Bewegungsgleichungen der einzelnen Massen:

Auf die Masse m_3 wirkt die Hangabtriebskraft $F_\mathrm{H} = m_3 g \sin\alpha$ und in entgegengesetzter Richtung die Seilspannung T_{32}. Die resultierende Beschleunigung, die m_3 erfährt, bezeichnen wir mit $\ddot{x}_3$. Die resultierende Bewegungsgleichung für m_3 ist somit:

$$-F_\mathrm{H} + T_{32} = m_3\ddot{x}_3 \tag{16}$$
$$\Rightarrow -m_3 g \sin\alpha + T_{32} = m_3\ddot{x}_3 \tag{17}$$
$$\Rightarrow T_{32} = m_3\ddot{x}_3 + m_3 g \sin\alpha \tag{18}$$

Auf Masse m_2 wirkt zum einen die Seilspannung in Seil l_{23} und in entgegengesetzte Richtung die Seilspannung in Seil l_{12}. Auch m_2 erfährt eine resultierende Beschleunigung, die betragsmäßig gleich groß ist wie $\ddot{x}_3$:

$$-T_{32} + T_{12} = m_2\ddot{x}_{2r} = -m_2\ddot{x}_{2l} \tag{19}$$

Auf Masse m_1 wirkt die Gravitationskraft und in entgegengesetzte Richtung die Seilspannung T_{12}. Auch m_1 erfährt eine resultierende Beschleunigung $\ddot{x}_1$. $\ddot{x}_1$ ist betragsmäßig genauso groß, wie $\ddot{x}_{2r}$, $\ddot{x}_{2l}$ und $\ddot{x}_3$.

$$-T_{12} + F_\mathrm{G} = m_1\ddot{x}_1 \tag{20}$$
$$\Rightarrow -T_{12} + m_1 g = -m_1\ddot{x}_1 \tag{21}$$
$$\Rightarrow T_{12} = m_1 g + m_1\ddot{x}_1 \tag{22}$$

Jetzt können wir mit (22) und (18) T_{12} und T_{32} in Gleichung (19) eliminieren. Über die Zwangsbedingungen haben wir einen Zusammenhang zwischen den Beschleunigungen und können schlussendlich beispielsweise nach $\ddot{x}_1$ auflösen:

$$\ddot{x}_1 = \frac{F_\mathrm{g} - F_\mathrm{H}}{m_1 + m_2 + m_3}. \tag{23}$$

(b) Jetzt können die Seilspannungen ganz leicht durch einsetzen von $\ddot{x}_1$ in Gleichung (22) und $\ddot{x}_3 = -\ddot{x}_1$ in Gleichung (18) bestimmt werden:

$$T_{12} = m_1(g + \frac{F_\mathrm{g} - F_\mathrm{H}}{m_1 + m_2 + m_3}) \tag{24}$$
$$T_{32} = m_3(g\sin\alpha - \frac{F_\mathrm{g} - F_\mathrm{H}}{m_1 + m_2 + m_3}) \tag{25}$$

Aufgabe 3: Arbeit, Leistung

(a) In der Zeit t_1 legt das Fahrzeug die Strecke s_1 zurück, und der Motor verrichtet die Arbeit

$$W = \int_0^{s_1} F_s \mathrm{d}s \quad \text{mit} \quad F_s = m a_\mathrm{W}. \tag{26}$$

Wegen $a_\mathrm{W} = \text{const.}$ folgt

$$W = m a_\mathrm{W} \int_0^{s_1} \mathrm{d}s = m a_\mathrm{W} s_1. \tag{27}$$

Für die Arbeit erhält man mit $s_1 = \frac{a_\mathrm{W}}{2} t_1^2$, dass

$$W = \frac{m a_\mathrm{W}^2 t_1^2}{2} = 49\,\mathrm{kW\,s}. \tag{28}$$

(b) Die Leistung ist

$$P(t_1) = \left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1} = m a_\mathrm{W}^2 t_1 = 33\,\mathrm{kW}. \tag{29}$$

(c) Die Beschleunigung a_B für das Anfahren am Berg wird mithilfe der Bewegungsgleichung berechnet:

$$m a_\mathrm{B} = F_S - F_H. \tag{30}$$

Darin ist F_S die Zugkraft des Motors. Sie hat denselben Betrag wie auf der waagrechten Strecke:

$$F_S = m a_\mathrm{W}. \tag{31}$$

F_H ist der Betrag der Komponente der Gewichtskraft in Richtung des Hanges:

$$F_\mathrm{H} = mg \sin\alpha \tag{32}$$

und es folgt daraus:

$$a_\mathrm{B} = a_\mathrm{W} - g\sin\alpha = 2{,}2\,\mathrm{m/s^2} \tag{33}$$

(d) Analog zu (b) ist $P(t_1) = \left.\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right|_{t_1}$. Allerdings muss das Auto jetzt eine andere Arbeit verrichten:

$$W = \int_0^{s_1} m a_\mathrm{W} \mathrm{d}s = \frac{m a_\mathrm{W} a_\mathrm{B} t_1^2}{2} \tag{34}$$

$$\Rightarrow P = m a_\mathrm{W} a_\mathrm{B} t_1 = 25\,\mathrm{kW}. \tag{35}$$

Aufgabe 4: Energieerhaltung

Am Startpunkt der Rampe hat Timmy die kinetische Energie $E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2} m v_0^2$(wenn seine Masse m ist), auf dem Gipfel hat er die potentielle Energie $E_\mathrm{pot} = mgh$ und keine kinetische Energie, da er stillsteht. Da keine Energie verloren geht oder hinzukommt, muss

$$E_\mathrm{kin} = E_\mathrm{pot} \tag{36}$$

gelten, was direkt zu Timmy's Startgeschwindigkeit führt:

$$v_0 = \sqrt{2gh}. \tag{37}$$

Um auf die Strecke zu kommen, auf der Timmy von seinem Vater angeschoben wird, muss man sich jetzt die beschleunigte Bewegung von Peter ansehen: Wenn sie nach der Zeit t beendet ist, also am Anfang der Rampe, hat Timmy die Geschwindigkeit $v_0 = a_\mathrm{P} t$ und hat die Strecke $d = \frac{1}{2} a_\mathrm{P} t^2$ zurückgelegt. Es folgt also für die Strecke:

$$d = \frac{v_0^2}{2a_\mathrm{P}} = \frac{2gh}{2a_\mathrm{P}} = 19{,}6\,\mathrm{m}. \tag{38}$$

Aufgabe 5: Kreisbewegung

Die Drehscheibe liege in der xy-Ebene und der Ursprung des Koordinatensystems sei im Mittelpunkt der Drehscheibe. Der Winkel zwischen Schiene und x-Achse sei $\varphi(t) = \omega t$.

(a) Die Vektoren für Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = r(t) \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = v_0 t \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{v_x}(t) \\ \dot{v_y}(t) \\ \dot{v_z}(t) \end{pmatrix} = v_0 \omega \begin{pmatrix} -2\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t) \\ 2\cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

(b) Für die Kraft als Funktion der Zeit ergibt sich

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t) \tag{42}$$

mit dem Betrag

$$F(t) = |\vec{F}(t)| = m v_0 \omega \sqrt{4 + (\omega t)^2}. \tag{43}$$

Für das Drehmoment erhält man

$$\vec{M}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t) = m v_0^2 \omega t \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t) \\ 2\cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = 2 m v_0^2 \omega t \hat{e}_z. \tag{44}$$

(c) Für den Drehimpuls gilt

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = m v_0^2 t \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Aufgabe 6: Drehmoment

Die Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{O}}$ von Otto und die Federkraft $\vec{F}_{\mathrm{F}}$ erzeugen zueinander entgegengerichtete Drehmomente $\vec{D}_{\mathrm{O}}$ und $\vec{D}_{\mathrm{F}}$, deren Summe im Gleichgewicht verschwindet. Wir legen den Drehpunkt in das linke Ende des Balkens (siehe Bild). Wir nehmen an, dass die Kräfte zu jeder Zeit senkrecht auf den Balken wirken und wir können daher mit den Beträgen der Drehmomente rechnen. Man erhält für die Drehmomente:

$$D_{\mathrm{O}} = \frac{L}{2} M g \quad \text{und} \quad D_{\mathrm{F}} = L k \Delta z_{\mathrm{F}} \tag{46}$$

Die Summe der Drehmomente soll verschwinden, weil sich die Anordnung nach Ottos Einsinken nicht mehr bewegt.

$$\vec{D}_{\mathrm{ges}} = \vec{D}_{\mathrm{O}} + \vec{D}_{\mathrm{F}} = 0. \tag{47}$$

Das bedeutet, dass die Beträge der beiden Drehmomente gleich sind.

$$D_{\mathrm{O}} = D_{\mathrm{F}} \Rightarrow \frac{L}{2} Mg = Lk\Delta z_{\mathrm{F}} \Rightarrow \Delta z_{\mathrm{F}} = \frac{Mg}{2k}, \tag{48}$$

wobei Δz_{F} die Strecke ist, um die die Feder zusammengedrückt wird. Da Otto in der Mitte des Balkens sitzt, sinkt er um

$$\Delta z_{\mathrm{O}} = \frac{\Delta z_{\mathrm{F}}}{2} = \frac{Mg}{4k} = 3{,}4\,\mathrm{cm} \tag{49}$$

Aufgabe 7: Gravitation

(a) Die Schwerkraft auf eine Masse m auf der Mars-Oberfläche ist:

$$F_{\mathrm{G}} = mg_{\mathrm{Mars}} = G\frac{mM_{\mathrm{Mars}}}{R_{\mathrm{Mars}}^2} \Rightarrow g_{\mathrm{Mars}} = G\frac{M_{\mathrm{Mars}}}{R_{\mathrm{Mars}}^2} = 3{,}71\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{50}$$

(b) Gesucht ist der Radius r der Kreisbahn mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T_{\mathrm{Mars}}}$ mit $T_{\mathrm{Mars}} = 24\,\mathrm{h}37\,\mathrm{min} = 88\,620\,\mathrm{s}$. Den Radius r erhalten wir durch das Kräftegleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Gravitationskraft:

$$\Rightarrow G\frac{mM_{\mathrm{Mars}}}{r^2} = m\omega^2 r \tag{51}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM_{\mathrm{Mars}}}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{GM_{\mathrm{Mars}}T_{\mathrm{Mars}}^2}{4\pi^2}} = 20\,144\,\mathrm{km} \tag{52}$$

Die Höhe des Satelliten über der Marsoberfläche ist somit:

$$h = r - R_{\mathrm{Mars}} = 1{,}7 \cdot 10^4\,\mathrm{km} \tag{53}$$