Probeklausur zum Ferienkurs Analysis 1

Wintersemester 2016/2017

07.04.2017

1. **[Vollständige Induktion - 6 Punkte]** Man zeige:

$$\sin(\theta + n\pi) = (-1)^n \sin\theta \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } \theta \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Hinweis: $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

Lösung:

Induktionsanfang: $n = 1$: [1]

$$\sin(\theta + \pi) = \sin\theta\cos\pi + \sin\pi\cos\theta = -\sin\theta = (-1)^1 \sin\theta \quad [1] \tag{2}$$

Induktionsvoraussetzung: $\sin(\theta + n\pi) = (-1)^n \sin\theta \quad \forall n \in \mathbb{N}$ [1] *(Punkt auf expliziten Hinweis auf Induktionsvoraussetzung, d.h. Annahme gelte für $n \in \mathbb{N}$)*

Induktionsschritt: $n \to n+1$: [1]

$$\sin(\theta + (n+1)\pi) = \sin((\theta + n\pi) + \pi) \tag{3}$$

$$= \sin(\theta + n\pi)\cos\pi + \sin\pi\cos(\theta + n\pi) \tag{4}$$

$$\overset{IV\,[1]}{=} -(-1)^n \sin\theta = (-1)^{n+1}\sin\theta \quad [1] \tag{5}$$

2. **[Komplexe Zahlen - $3+3$ Punkte]**

a) Geben Sie den Realteil sowie Imaginärteil der komplexen Zahl x an, wobei

$$x = z^* + z^{-1} \tag{6}$$

erfüllt. $z = a + ib$, $z^* := a - ib$.

$\mathrm{Re}(x) = \frac{a(a^2+b^2)+a}{a^2+b^2} = \frac{a^3+ab^2-a}{a^2+b^2}$ [1,5]	$\mathrm{Im}(x) = \frac{-b(a^2+b^2)-b}{a^2+b^2} = \frac{-b^3-ba^2-b}{a^2+b^2}$ [1,5]

b) Geben Sie den Betrag r sowie das Argument $\phi \in (-\pi, \pi]$ von $z = re^{\mathrm{i}\phi}$ an, für

$$z = (2 + 2\sqrt{3}\ \mathrm{i})^6 \tag{7}$$

$r = 4096$ [1,5]	$\phi = 0$ [1,5]

Lösung:

a)

$$x = a - \mathrm{i}b + \frac{1}{a + \mathrm{i}b} = a - \mathrm{i}b + \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2} \tag{8}$$

$$= \frac{(a - \mathrm{i}b)(a^2 + b^2) + (a - \mathrm{i}b)}{a^2 + b^2} \tag{9}$$

Daraus folgt:

$$\mathrm{Re}(x) = \frac{a(a^2 + b^2) + a}{a^2 + b^2} = \frac{a^3 + ab^2 + a}{a^2 + b^2} \tag{10}$$

sowie

$$\mathrm{Im}(x) = \frac{-b(a^2 + b^2) - b}{a^2 + b^2} = \frac{-b^3 - ba^2 - b}{a^2 + b^2} \tag{11}$$

b) Man betrachte zunächst $\tilde{z} = \tilde{r}e^{i\tilde{\phi}} = (2 + 2\sqrt{3}\ \mathrm{i})$.

$$\tilde{r} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{16} = 4 \tag{12}$$

$$\tilde{\phi} = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \tag{13}$$

$$\Rightarrow z^6 = 4^6 e^{i6\pi/3} = 4^6 = 4096 + (\cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi)) = 4096 \tag{14}$$

Die Phase ist im Bereich $(-\pi, \pi]$ anzugeben, weshalb $\phi = 0$ die korrekte Antwort ist.

3. **[Potenzreihen - 3 Punkte]** Der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n\sqrt{n+1}(x+1)^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{C} \tag{15}$$

beträgt

☐ 0 ☐ $\frac{1}{3}$ ☒ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ [3] ☐ $\sqrt{3}$ ☐ $\frac{1}{9}$ ☐ ∞ ☐ 3

Lösung:

Mit dem Quotientenktiterium folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\sqrt{n+2}}{3^n\sqrt{n+1}} \tag{16}$$

$$= 3|x+1|^2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = 3 \tag{17}$$

Damit folgt: Die Reihe konvergiert für

$$|x+1|^2 < 1/3 \ \Leftrightarrow \ |x+1| < \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{18}$$

Alternative Betrachtung:

Das Quotientenkriterium gilt streng genommen nur für Potenzreihen der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$. Deshalb können wir definieren $k := 2n+1$ und wir summieren über alle ungeraden $k \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, die Reihe konvergiere. Dann besitzt die Folge $\widetilde{(a_n)} = (-3)^n\sqrt{n+1}$ den Grenzwert 0 und konvergiert. Dann konvergiert nach dem Satz von Bolzano-Weiherstraß auch jede Teilfolge und hat denselben Grenzwert. Wir betrachten die Konvergenz der Teilfolge

$$a_{k(n)} = (-3)^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{\frac{k-1}{2}+1} = (-3)^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{(k+1)/2}, \ k = 2n+1 \tag{19}$$

Mit dem Quotientenkriterium erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{k(n+1)}}{a_{k(n)}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+2}}{a_k}\right| \tag{20}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-3)^{\frac{k+1}{2}}\sqrt{(k+3)/2}}{(-3)^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{(k+1)/2}}\right| \tag{21}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|(-3)^{\frac{k+1}{2}-\frac{k-1}{2}}\sqrt{\frac{k+3}{k+2}}\right| = \sqrt{3} \tag{22}$$

Damit kommen wir auf den gleichen Konvergenzradius

4. **[Folgen und Reihen - 3+3+3 Punkte]**

i) Welche Häufungspunkte weist die Folge

$$a_n = (1-\mathrm{i})\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{i}^j, \quad n \in \mathbb{N} \tag{23}$$

auf?

Lösung: Man fasst die Summe am einfachsten als geometrische Summe auf [1] und schreibt:

$$a_n = (1-\mathrm{i})\sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{i}^j = (1-\mathrm{i})\frac{1-\mathrm{i}^n}{1-\mathrm{i}} = 1-\mathrm{i}^n \text{ [1]} \tag{24}$$

Also gibt es vier Fälle:

$$a_{4k} = 0,\ a_{4k+1} = 1-\mathrm{i},\ a_{4k+2} = 2,\ a_{4k+3} = 1+i \text{ [1]} \tag{25}$$

ii) Die Folge

$$b_n = (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{26}$$

ist

☒ divergent [3] ☐ konvergent ☐ Cauchy-Folge ☐ Nullfolge ☐ bestimmt divergent

Lösung: Das die cos-Funktion stetig ist gilt

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 1 \tag{27}$$

Also verhält sich die Folge für große n wie

$$b_n \sim (-1)^n \tag{28}$$

und konvergiert nicht.

iii) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right) \tag{29}$$

ist

☒ divergent [3] ☐ konvergent ☐ absolut konvergent ☐ nicht defniert

Lösung:

Wie davor gezeigt, ist b_n keine Nullfolge und damit konvergiert die Reihe nicht.

5. **[Taylorrreihen - 6 Punkte]** Man entwickle

$$f(x) : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2), x \mapsto \arctan(x) \tag{30}$$

in eine Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ und berechne damit $\pi/4 \simeq 0.785$ näherungsweise mit den drei führenden Termen.

Hinweis: $(\arctan(x))' = 1/(1 + x^2)$.

Lösung:

Wir erkennen (Hinweis):

$$\arctan(x) \overset{[1]}{=} \int_0^x \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^x \frac{1}{1-(-y^2)}\,\mathrm{d}y \tag{31}$$

Mann kann den Integranden als geometrische Reihe auffassen und es ergibt sich:

$$\arctan(x) \overset{[1]}{=} \int_0^x \sum_0^\infty \left(-y^2\right)^n \mathrm{d}y \overset{[1]}{=} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \tag{32}$$

Damit kann man berechnen:

$$\frac{\pi}{4} \overset{[1]}{=} \arctan(1) \overset{[1]}{=} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots \overset{[1]}{\simeq} \frac{13}{15} \approx 0.867 \tag{33}$$

Alternativer Lösungsweg 1:
Die Tutoren haben sich entschieden, auch den folgenden Lösungsweg gelten zu lassen:
Gefragt ist nach der Taylor-Reihe. Diese ist definiert als

$$Tf(x;a) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \text{ [1]} \tag{34}$$

Durch händisches Berechnen der ersten Glieder (ungerade Ableitungen verschwinden nicht) erhalten wir die Näherung für $\pi/4$.

$$f(0) = 0 \text{ [1/2]} \tag{35}$$
$$f'(0) = 1 \text{ [1/2]} \tag{36}$$
$$f''(0) = 0 \text{ [1/2]} \tag{37}$$
$$f^{(3)}(0) = -2 \text{ [1/2]} \tag{38}$$
$$f^{(4)}(0) = 0 \text{ [1/2]} \tag{39}$$
$$f^{(5)}(0) = 24 \text{ [1/2]} \tag{40}$$

$$\frac{\pi}{4} \overset{[1]}{=} \arctan(1) \approx 1 - \frac{2}{3!} + \frac{24}{5!} \overset{[1]}{=} \frac{13}{15} \tag{41}$$

Alternativer Lösungsweg 2: Wir können auch die Definition der Taylor-Reihe

$$Tf(x;a) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \text{ [1]} \tag{42}$$

benutzen, und mithifle der bekannten ersten Ableitung umformulieren:

$$Tf(x;a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(f^{(1)}(x)\right)\right]_{x=a}}{n!}(x-a)^n \text{ [1]} \tag{43}$$

Wir erkennen die geometrische Reihe

$$f(x) = \arctan(x) \tag{44}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k \overset{[1/2]}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} \tag{45}$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2k)x^{2k-1} \tag{46}$$

$$f'''(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2k)(2k-1)x^{2k-2} \tag{47}$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k(2k)(2k-1)(2k-2)\dots(2k-n+2)x^{2k-n+1} \tag{48}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k-n+1)!}x^{2k-n+1} \tag{49}$$

Eingesetzt in die Formel von Taylor erhalten wir

$$Tf(x;0) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k-n+1)!}x^{2k-n+1}\right]_{x=0}\frac{x^n}{n!} \tag{50}$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern wird nur dann ungleich null, wenn $x^{2k-n+1} = 0^0 = 1$ (diese Definition ist hier sinnvoll). Dann ist $2k+1 = n$ (n ungerade). [1/2] Wir schreiben den Summationsindex der ersten Summe um, die zweite Summe fällt weg. Daraus folgt

$$Tf(x;0) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ [1]} \tag{51}$$

$$\frac{\pi}{4} \overset{[1]}{=} \arctan(1) \approx 1 - \frac{2}{3!} + \frac{24}{5!} \overset{[1]}{=} \frac{13}{15} \tag{52}$$

6. **[Integration - 6 Punkte]** Man berechne das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\, \mathrm{d}x \tag{53}$$

mithilfe der Substitution $x = \frac{1-u}{1+u}$ aus. (Ergebnis: $I = \pi/8 \cdot \ln 2$)

Lösung:

Für die Substitution gilt:

$$x = \frac{1-u}{1+u}, \quad \mathrm{d}x = -\frac{2}{(1+u)^2}\, \mathrm{d}u. \text{ [1]} \tag{54}$$

Außerdem ist

$$x+1 = \frac{2}{1+u}, \quad x^2+1 = \frac{2(1+u^2)}{(1+u)^2}. \tag{55}$$

Damit wird das Integral zu:

$$I \overset{[1]}{=} \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\, \mathrm{d}x \text{ [1]} = \int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{2}{1+u}\right)}{\frac{2(1+u^2)}{(1+u)^2}} \left(-\frac{2}{(1+u)^2}\, \mathrm{d}u\right) \tag{56}$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{2}{1+u}\right)}{(1+u^2)}\, \mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\ln 2}{(1+u^2)}\, \mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{(1+u^2)}\, \mathrm{d}u \tag{57}$$

$$\overset{[1]}{=} \ln 2\, [\arctan(u)]_0^1 - I \overset{[1]}{=} \frac{\pi}{4} \ln 2 - I \tag{58}$$

Damit folgt

$$I = \frac{\pi}{8} \ln 2. \text{ [1]} \tag{59}$$

7. **[Extrema - 6 Punkte]** Man betrachte folgende als Integral definierte Funktion:

$$\mathrm{Ci}(x) : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{Ci}(x) = \int_\pi^x \frac{\cos(\alpha)}{\alpha}\, \mathrm{d}\alpha. \tag{60}$$

Man begründe, warum die Funktion auf dem Intervall ein Extremum annimmt und bestimme den zugehörigen x-Wert.

Lösung:

Nach dem Majoranten-Kriterium existiert das Integral:

$$\left|\frac{\cos(\alpha)}{\alpha}\right| \leq \frac{1}{\alpha}. \text{ [1]} \tag{61}$$

Für $x \in [\pi, 3\pi/2)$ ist die Stammfunktion

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\alpha} \text{ [1]} \tag{62}$$

negativ, also $\mathrm{Ci}(x)$ streng monoton fallend. [1] Für $x \in (3\pi/2, 2\pi]$ ist sie dagegen positiv, also streng monoton steigend [1] . Im Nulldurchgang der Stammfunktion hat $\mathrm{Ci}(x)$ also ein Extremum [1] (Minimum), nämlich bei

$$x_{\min} = \frac{3\pi}{2} \text{ [1]} , \quad \mathrm{Ci}(x_{\min}) \simeq -0.27 \tag{63}$$