Übungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 4
Wintersemester 2016/2017

1 Legendre-Transformation Die Legendre-Transformation ist für Physiker von enormer Bedeutung. Man kann die sog. „Hamilton-Funktion“ $H(p)$, die vom Impuls p und dem Ort q abhängt, durch Legendre-Transformation in die sog. „Lagrange-Funktion“ $L(\dot{q})$ umwandeln. Die Transformation lautet:

$$\mathcal{L}\{H(p)\} = L(\dot{q}) \tag{1}$$

Hinweis: Die Legendre-Transformation ist definiert als

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(g) = \sup_{x\in I}(gx - f(x)) \tag{2}$$

Wobei $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist. Wir nehmen die Konvexität von H hier als gegeben an!
Berechnen Sie die Legendre-Transformation der Funktion

$$H(p) \quad = \quad \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{3}$$

Lösung: Durch die gegebene Eigenschaft der Hamilton-Funktion

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \sup_{x\in R}(gx - f(x)) \tag{4}$$

Können wir durch Maximierung feststellen:

$$\frac{d}{dx}(gx - f(x)) = g - \frac{df(x)}{dx} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow g = \frac{df(x)}{dx} \tag{5}$$

Hier gilt $f(x) = H(p)$ und $\mathcal{L}\{f(x)\} = L(\dot{q})$ woraus sofort folgt, dass

$$p = x,\ g = \dot{q} = \frac{dH(p)}{dp} \tag{6}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{dH(p)}{dp} = \frac{d}{dp}\left(p^2x^2+m^2c^4\right)^{1/2} = \left(p^2c^2+m^2c^4\right)^{-1/2}\cdot pc^2 && (7)\\
\Rightarrow \mathcal{L}\{H(p)\} &= \dot{q}p - H(p) = \left(p^2c^2+m^2c^4\right)^{-1/2}\cdot p^2c^2 - \left(p^2c^2+m^2c^4\right)^{1/2} && (8)\\
&= -m^2c^4\left(p^2c^2+m^2c^4\right)^{-1/2} && (9)\\
&= -mc^2\left(p^2/(m^2c^2)+1\right)^{-1/2} && (10)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hängt noch von der Variable p ab, wir müssen also außerdem noch umstellen:

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{dH(p)}{dp} = \frac{d}{dp}\left(p^2x^2+m^2c^4\right)^{1/2} = \left(p^2c^2+m^2c^4\right)^{-1/2}\cdot pc^2 && (11)\\
\Rightarrow \dot{q}^2\left(p^2x^2+m^2c^4\right)^{1/2} &= pc^2 && (12)\\
\Rightarrow p^2 &= \dot{q}^2m^2\left(1-\dot{q}^2/c^2\right)^{-1} \Rightarrow p^2/(m^2c^2) = \dot{q}^2/c^2\cdot(1-\dot{q}^2/c^2)^{-1} && (13)
\end{aligned}$$

Wieder eingesetzt ergibt das

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{H(p)\} &= -mc^2\left(\dot{q}^2/c^2\cdot\left(1-\dot{q}^2/c^2\right)^{-1}+1\right)^{-1/2} && (14)\\
&= -mc^2\left(\frac{\dot{q}^2/c^2+1-\dot{q}^2/c^2}{1-\dot{q}^2/c^2}\right)^{-1/2} = -mc^2\left(1-\dot{q}^2/c^2\right)^{1/2} && (15)
\end{aligned}$$

2 Sätze und Aussagen

2.1 Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS)

a) Überprüfen Sie für die folgenden Funktionen die Anwendbarkeit des MWS:

- $f_1(x) = -(6x+24)^{-3}, x \in \mathbb{R}$
- $f_2(x) : [0,\infty) \to (-\infty,\infty),\ x \mapsto \begin{cases} -(x+2)^{-3} & \text{für } x \in [0,4] \\ -1/216 & \text{für } x > 4 \end{cases}$

b) In der Elektrodynamik benötigt man oft die Abschätzung

$$g(x) := \frac{a}{\sqrt{r^2+x^2+rx\cos\theta}} \leq \frac{a}{r}\left(1+\frac{x}{r}\cos\theta\right) \tag{16}$$

mit $a, \theta, r, x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass diese für alle $x > 0$ gilt!

c) Berechnen Sie die ersten drei Terme der Taylor-Entwicklung von $g(x)$ um $x = 0$ und drücken Sie die Restterme durch ein geeignetes Landau-Symbol aus.

2.2 Fixpunktsatz Das Heron-Verfahren verwendet zur Berechnung der Quadratwurzel einer reellen Zahl $a > 0$ die Funktion $\Phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$. Diese ist gegeben durch die Vorschrift

$$\Phi : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \tag{17}$$

Warum besitzt Φ einen Fixpunkt $x_0 = \Phi(x_0),\ x_0 \in \mathbb{R}^+$? Nennen Sie diesen! Zeigen Sie, dass Φ Lipschitz-stetig ist und geben Sie die Lipschitz-Konstante an.

2.3 Absolute Konvergenz von Reihen Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) Eine Reihe konvergiere. Daraus folgt: sie konvergiert sogar absolut!

b) Eine Reihe konvergiere absolut. Daraus folgt: sie konvergiert.

c) Eine Reihe konvergiere nicht absolut. Daraus folgt: sie konvergiert nicht.

d) Wenn der Mond ein gelber Käse ist, ist 6 eine Primzahl.

Lösung:

2.1 Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS)

a) f_1 ist nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$, weil sie eine Polstelle bei $x = -4$ besitzt. Damit gilt für f_1 auch nicht der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. f_2 ist auf $[0, \infty)$ stetig: $\lim_{x \nearrow 4} f_2(x) = -1/6^3 = -1/216 = \lim_{x \searrow 4} f_2(x)$ und auf beiden Intervallen $[0, 4]$ und $[4, \infty)$ ist $f_2(x)$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Auf $[0, 4)$ und $(4, \infty)$ ist f_2 außerdem differenzierbar. Wir prüfen Differenzierbarkeit auf $x = 4$:

$$\lim_{x \searrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \searrow 4} \frac{-(x+2)^{-3} + 1/216}{x - 4} = \lim_{x \searrow 4} \frac{\left(\frac{3}{(x+2)^4}\right)}{1} = \frac{3}{6^4} \tag{18}$$

$$\lim_{x \nearrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \nearrow 4} \frac{-1/216 + 1/216}{x - 4} = 0 \tag{19}$$

Die beiden Grenzwerte sind nicht gleich, weshalb f_2 in $x = 4$ nicht differenziarbar ist. Deshalb ist der Mittelwertsatz nur auf den Intervallen $[0, 4)$ bzw. $(4, \infty)$ anwendbar.

b) *Hinweis von der Tafel:* $r, a, x > 0$, *weshalb auch gilt* $r\cos\theta > 0$. Wir können den Mittelwertsatz für die Abschätzung zu Hilfe nehmen (die Funktion ist stetig und differenzierbar, erfüllt also die Voraussetzungen):

$$g'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x + r\cos\theta)a}{\sqrt{r^2 + x^2 + rx\cos\theta}^3} \tag{20}$$

Nach dem Mittelwertsatz exisiert ein $g'(\xi)$ mit $\xi \in (0, x)$ sodass gilt

$$g'(\xi) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(2\xi + r\cos\theta)a}{\sqrt{r^2 + \xi^2 + r\xi\cos\theta}^3} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \tag{21}$$

$$= \frac{\frac{a}{\sqrt{r^2 + x^2 + rx\cos\theta}} - \frac{a}{r}}{x} \leq \frac{ra \cdot \cos\theta}{\sqrt{r^2 + \xi^2 + r\xi\cos\theta}^3} \leq \frac{a\cos\theta}{r^2} \tag{22}$$

(Zusammen mit dem Hinweis von der Tafel gilt diese Abschätzung immer). Wir bekommen die Ungleichung

$$\frac{g(x)}{x} - \frac{a}{rx} \leq \frac{a\cos\theta}{r^2} \tag{23}$$

$$\Rightarrow g(x) \leq \frac{a}{r} + \frac{ax\cos\theta}{r^2} = \frac{a}{r}\left(1 + \frac{x\cos\theta}{r}\right) \tag{24}$$

und wir landen beim zu zeigenden Ausdruck.

Wir entwickeln die Funktion bis zum dritten Potenzreihenglied:

$$g(0) = \frac{a}{r} \tag{25}$$

$$g'(0) = \frac{a\cos\theta}{r^2} \tag{26}$$

$$g''(0) = \frac{a}{4r^3}\left(3\cos^2\theta - 4\right) \tag{27}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{a}{r}\left(1 + \frac{\cos\theta}{r}x + \frac{1}{8r^2}\left(3\cos^2\theta - 4\right)x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right) \tag{28}$$

2.2 Fixpunktsatz Da die Funktion Φ von der Definitionsmenge auf wiederum die Definitionsmenge selbst abbildet, ist der Fixpunktsatz anwendbar: es existiert ein $x_0 \in (0, \infty)$, sodass gilt $\Phi(x_0) = x_0$. Für dieses muss dann gelten

$$\Phi(x_0) = x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Rightarrow x_0 = \sqrt{a} \tag{29}$$

Man sieht, dass der Fixpunkt x_0 genau der gesuchten Quadratwurzel $\sqrt{a}$ entspricht. Man kann den Algorithmus iterativ verwenden, um die Quadratwurzel beliebig anzunähern (dazu gelten weitere Eigenschaften, hier nur zur Information, ohne Beweis).
Wir untersuchen auf Lipschitz-Stetigkeit: Seiten $x, y \in (0, \infty)$

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y| \tag{30}$$

$$\left|\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(y + \frac{a}{y}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}(x - y) + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\right| < \frac{1}{2}|x - y| \tag{31}$$

für $x \geq y$. Da x und y beliebig, ist $\Phi(x)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1/2$.

2.3 Absolute Konvergenz von Reihen

a) falsch. Gegenbeispiel $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n}$.

b) wahr. Lemma aus der Vorlesung.

c) falsch. Sie kann dann trotzdem noch konviergieren, weil absolute Konvergenz eine stärkere Aussage ist

d) wahr. Der Mond ist kein gelber Käse, weshalb jede Folgerung daraus richtig wäre.

3 Funktionenfolgen Man kann den Mittelwertsatz auch dafür benutzen, um die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen $f_n(x)$ zu widerlegen. Beurteilen Sie, ob die Abschätzung

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \tag{32}$$

für eine beliebige Funktionenfolge $f_n(x) : D \to M$ und eine beliebig gewählte Folge von x-Werten $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D$ gilt. Wie hilft diese Abschätzung bei der Widerlegung gleichmäßiger Konvergenz? Kann man die Abschätzung auch dafür verwenden, um gleichmäßige Konvergenz zu beweisen?

Lösung: Da für alle x_n gilt $x_n \in D$ darf man alle x_n in $f(x)$ einsetzen. Dann ist auch $f_n(x_n) - f(x_n)$ stets in M. Man kann per Definition des Supremums sagen, dass gelten muss

$$\sup_{x\in D}|f_n(x_n)-f(x_n)| \geq |f_n(x_n)-f(x_n)| \tag{33}$$

Außerdem gilt natürlich (wieder per Definition des Supremums)

$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| \geq \sup_{x\in D}|f_n(x_n)-f(x_n)| \tag{34}$$

Daraus folgt die Behauptung

$$\Rightarrow \sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| \geq |f_n(x_n)-f(x_n)|. \tag{35}$$

Kann man nun zeigen, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)| > 0 \tag{36}$$

so gilt auch

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| > 0 \tag{37}$$

und damit konvergiert $f_n(x)$ nicht gleichmäßig gegen $f(x)$ auf D. Umgekehrt kann man aber **nicht** zeigen, dass für den Fall

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)| = 0 \tag{38}$$

gleichmäßige Konvergenz gilt, weil daraus nur folgt

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| \geq 0 \tag{39}$$

und daraus keine Aussage über die gleichmäßige Konvergenz gemacht werden kann.

4 Abschätzung Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ gilt:

$$|\cos(a)-\cos(b)| \leq |a-b| \tag{40}$$

Lösung: Umstellen der Ungleichung ergibt:

$$\frac{|\cos(a)-\cos(b)|}{|a-b|} \leq 1 \tag{41}$$

Der Mittelwertsatz besagt, dass mindestens ein $c = \sin(x_0),\ c \in [-1,1]$ mit $x \in [a,b]$ existiert, für das gilt:

$$\frac{\cos(b) - \cos(a)}{b - a} = -\sin(x_0) \tag{42}$$

Der Mittelwertsatz darf angewandt werden, weil das Intervall $[a, b]$ kompakt ist und $\cos(x)$ stetig differenzierbar auf $[a, b]$.
Wegen der Eigenschaft $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ gilt

$$-1 \leq \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b - a} \leq 1 \tag{43}$$

woraus die Behauptung folgt.

5 Stetige Fortsetzbarkeit Wie bereits in einem vorherigen Übungsblatt gesehen, stellen die fünften Einheitswurzeln (Lösungen von $z^5 = 1$) die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks dar. Wir wollen im Folgenden die Funktion $f(z)$ betrachten:

$$f(z) : \mathbb{C} \setminus \{1 + 0i\} \to \mathbb{C}, f : z \mapsto \frac{z^5 - 1}{z - 1} \tag{44}$$

- Finden Sie eine stetige Fortsetzung $g(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von f in $z = 1$!
- Ist die Funktion injektiv/surjektiv? Ist ihre Fortsetzung injektiv/surjektiv?
- Zeigen Sie, dass die Nullstellen von g genau $(-1/4 \pm \sqrt{5}/4)$ im Realteil entsprechen. Hinweis: Substituieren Sie $t := z + 1/z$, um das Polynom g auf ein Polynom zweiten Grades zurückzuführen. Hiermit können Sie zeigen, dass die bereits ohne Beweis verwendeten Beziehungen

$$2\cos(2\pi/5) = -1/2 + \sqrt{5}/2 \tag{45}$$
$$2\cos(4\pi/5) = -1/2 - \sqrt{5}/2 \tag{46}$$

tatsächlich gelten!

Lösung: Durch Polynomdivision können wir zeigen, dass

$$(z^5 - 1) : (z - 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 =: g(z) \tag{47}$$

Und somit ist $g(z)$ eine stetige Fortsetzung von $f(z)$.

f ist nicht injektiv, da es für $f(z) = 0$ zwei verschiedene Lösungen $z = \pm i$ gibt. Aus dem selben Grund ist auch die stetige Fortsetzung von f nicht injektiv. f ist nicht surjektiv, da für $f(z) = 5$ keine Lösung mit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ existiert. Sonst müsste nämlich gelten: $z^5 - 1 = 5(z - 1)$. Da $z = 1$ nicht im Definitionsbereich von f liegt, ist Polynomdivision zulässig: $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 5$ ergibt aber genau $z = 1$ als Lösung: Widerspruch. Betrachtet man aber die stetige Fortsetzung, so exisitert diese Lösung. Ist die stetige Fortsetzung von f surjektiv? Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt: Jedes (nicht konstante) Polynom $P(z \in \mathbb{C})$ hat (mindestens) eine Nullstelle. Dann gilt aber auch für ein beliebiges $c \in \mathbb{C}$, dass $P(z) - c = 0$ eine Lösung besitzt, weil $P(z) - c$ ebenfalls ein (nicht konstantes) Polynom ist. Damit besitzt allerdings auch die Gleichung $P(z) = c$ immer eine Lösung, da $P(z)$ beliebig. Die stetige Fortsetzung von $f(z)$ ist ein solches Polynom, und deshalb surjektiv.

Um die Nullstellen zu bestimmen gehen wir wie folgt vor: Wir dürfen die gesamte Funktionsgleichung nullsetzen und durch z^2 teilen, weil z^2 ungleich null sein muss ($z = 0$ erfüllt die Gleichung nämlich nicht, siehe im Folgenden). Wir erhalten ein Polynom 2. Grades, das wir durch die geeignete Transformation (Hinweis) in die Normalform bringen. Dann bestimmen wir die Nullstellen.

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad |: z^2 \neq 0 \tag{48}$$

$$z^2 + z + 1 + 1/z + 1/z^2 = 0 \tag{49}$$

Um auf eine quadratische Gleichung der Form

$$at^2 + bt + c = 0 \tag{50}$$

zu kommen, müssen wir die Koeffizienten vergleichen:

$$t = z + 1/z \tag{51}$$

$$t^2 = (1/z^2 + 2 + z^2) \tag{52}$$

$$\Rightarrow a(1/z^2 + z^2 + 2) + b(1 + 1/z) + c = 0 \tag{53}$$

Daraus folgt sofort, dass $a = 1, b = 1, c = -1$, also:

$$t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{54}$$

Entsprechend durch Rücksubstitution erhalten wir:

$$t = z + 1/z \Rightarrow z^2 - tz + 1 = 0 \tag{55}$$
$$z_{1,2,3,4} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2} \tag{56}$$
$$z_{1,2,3,4} = \frac{(-1 \pm \sqrt{5})/2}{2} \pm \frac{\sqrt{(-1 \pm \sqrt{5})^2 - 4}}{2} \tag{57}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \pm \frac{i\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4} \tag{58}$$

Dabei ist darauf zu achten, dass das Vorzeichen vor $\sqrt{5}$ immer gleich gewählt wird (man verwendet ja auch immer das gleiche 't'). Wir erhalten die vier möglichen Werte

$$w_5^0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \tag{59}$$
$$w_5^1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \tag{60}$$
$$w_5^2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \tag{61}$$
$$w_5^3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \tag{62}$$

Da wir in einem vorherigen Blatt schon mithilfe der Moivre-Formel herausgefunden haben, dass $\Re w_5^k$ genau den Werten $\cos(2\pi/5)$ und $\cos(4\pi/5)$ entspricht, können wir durch Vergleich sofort feststellen, dass dann auch gelten muss:

$$2\cos(2\pi/5) = -1/2 + \sqrt{5}/2 \tag{63}$$
$$2\cos(4\pi/5) = -1/2 - \sqrt{5}/2 \tag{64}$$

6 Konvergenzradius Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k - g(z) \tag{65}$$

Wobei $g(z)$ die stetige Fortsetzung aus der vorherigen Aufgabe ist. Hier gelte $z \in \mathbb{R}$.

- Geben Sie den Konvergenzradius an.
- Für welche $z \in \mathbb{R}$ konvergiert/divergiert die Reihe?

- Hat die Folge

$$a_k := z^k - g(z),\ \ k = 0, 1, 2, 3 \dots \tag{66}$$

ein Maximum/Supremum bzw. ein Minimum/Infimum? Hat (a_K) Häufungspunkte? Führen Sie ggf. eine Fallunterscheidung durch!

Lösung: Die Reihe schreiben wir zunächst aus:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} z^k - g(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k - (z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) && (67)\\
&= (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) - (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) + \sum_{k=5}^{\infty} z^k && (68)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+5} = \sum_{k=0}^{\infty} z^5 z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k && (69)
\end{aligned}$$

Nach dem Wurzelkriterium haben wir dann für den Konvergenzradius r (Satz von Cauchy-Hadamard):

$$r = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|z^5|}} = 1 \tag{70}$$

Für $|z| < 1$ konvergiert die Reihe also, für $|z| > 1$ divergiert sie. Mit dem verwendeten Kriterium können wir zunächst keine Aussage für $|z| = 1$ treffen. Wir erhalten für letzteren Fall eine Summe, die offensichtlich divergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots \to \infty \text{ (bestimmt divergent)} \tag{71}$$

oder

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \text{ (unbestimmt divergent)} \tag{72}$$

Die Folge $z^k - g(z)$ kann man folgendermaßen ausschreiben:

k	$z^k - g(z)$
0	$1 - (1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$
1	$z - (1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$
...	
5	$z^5 - (1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$
...	

Es gilt stets: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = const. := c$. Dabei wird c von z^4 dominiert und ist deshalb stets positiv. Jetzt muss man die folgenden Fälle unterscheiden:

- $z = 1 \Rightarrow c = 5$ alle Folgenwerte sind identisch (und konstant), weshalb $-(z + z^2 + z^3 + z^4) = -4$ als Minimum und Maximum angenommen wird (und deshalb auch Supremum und Infimum ist). -4 ist dann auch Häufungspunkt.
- $z = -1 \Rightarrow c = 1$. die Folge divergiert unbestimmt, hat als Maximum $0 = 1 - c$ und als Minimum $-2 = -1 - c$. Die Teilfolgen der positiven bzw. negativen Folgeglieder sind konstant 0 bzw. -2 und konvergieren folglich gegen das Maximum bzw. das Minimum. Diese beiden Punkte sind dann Häufunspunkte der Folge.
- $0 < z < 1 \Rightarrow$ die Folge z^k ist streng monoton fallend und hat ein Maximum bei $1 - c = -(z + z^2 + z^3 + z^4)$, sowie ein Infimum bei $-c = -(1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = -(z + z^2 + z^3 + z^4) - 1$.
- $z > 1 \Rightarrow$ die Folge z^k ist streng monoton wachsend und hat ein Minimum bei $1 - c$.
- $-1 < z < 0 \Rightarrow$ die Folge ist alternierend, hat ein Minimum bei $z - c$ und ein Maximum bei $1 - c$. Sie konvergiert gegen $-c$.
- $z < -1 \Rightarrow$ die Folge ist alternierend, hat ein kein Minimum bei und kein Maximum , auch kein Infimum oder Supremum. Sie divergiert unbestimmt.

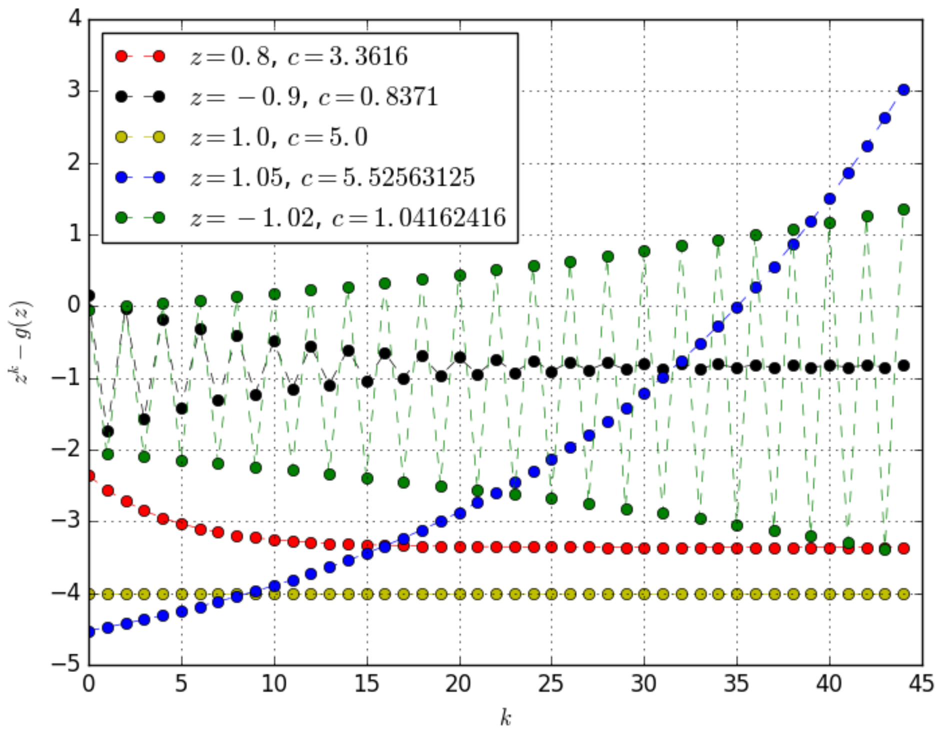

Abbildung 1: Graphische Darstellung der Folge $z^k - g(z),\ z \in \mathbb{R}$ für verschiedene z.

5. Potenzreihendarstellung (Teil 1) Geben Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen an, sowie den Geltungsbereich der Entwicklung.

a) $f(x) = \ln \dfrac{a+bx}{a-bx}$

b) $h(x) = \sin^2(2x)$

c) $j(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+z)dz$

(c: Man berechne über die Reihendarstellung des ln und „klassisch" durch integrieren)

Lösung:

a) Wir versuchen auf die bekannte Reihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}, |x| > 1 \tag{73}$$

abzuleiten. Dazu müssen wir den Bruch umschreiben:

$$f(x) = \ln \frac{a+bx}{a-bx} = \ln \frac{a-bx+2bx}{a-bx} = \ln\left(1 + \frac{2bx}{a-bx}\right) \tag{74}$$

Wir setzen in die Reihendarstellung ein und erhalten

$$\ln \frac{a+bx}{a-bx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{2bx}{a-bx}\right)^k}{k} \tag{75}$$

Die Darstellung ist gültig im Bereich

$$|\frac{2bx}{a-bx}| > 1 \tag{76}$$

b) Wir verwenden $\sin(2x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ und kommen so auf

$$\sin^2(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{(2k)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + x^2/2 - \dots\right) = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{(2k)!} \tag{77}$$

Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$ (wegen der Reihendarstellung des cos, bzw. Anwendung der Formel von Cauchy-Hadamard/Quotientenkriterium).

c) Über die Definition

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \tag{78}$$

kommt man auch hier weiter. Es gilt nämlich

$$\int \ln(1+z) = \int \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{k+1}}{k(k+1)} \tag{79}$$

Setzen wir die Grenzen ein, so kommen wir auf

$$\int \ln(1+z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \tag{80}$$

Wir können auch über die Stammfunktion des ln gehen: wir substituieren $u = 1+z$.

$$\int_0^x \ln(1+z)dz = \int_1^{1+x} \ln u du = [u \ln u - u]_1^{1+x} \tag{81}$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - (x+1) + 1 = (x+1)\ln(x+1) - x \tag{82}$$

Wir überprüfen die ersten Glieder, indem wir die analytische Lösung wieder in eine Reihe entwickeln:

$$(x+1)\ln(1+x) - x = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - x + \mathcal{O}(x^5) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$$

Man erkennt, dass die ersten Folgenglieder übereinstimmen, und tatsächlich konvergiert die gefundene Reihe gegen die analytische Stammfunktion, für $|x| < 1$.

6. Potenzreihendarstellung (Teil 2)

a) Berechnen Sie den Wert von

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$$

b) Berechnen Sie $I'(\ln(x))$ für $I(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt$. Hinweis: $I(x)$ existiert für $x > 1$.

Nennen Sie außerdem die Darstellung von $I(x)$ als Potenzreihe.

c) Berechnen Sie die 300-te Ableitung von $f(x) = \exp(2x^3)$ bei $x = 0$.

Lösung:

a) Wir verwenden

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{83}$$

und erhalten

$$\frac{\cos(x) - 1 + x^2/2}{x^4} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} - 1 + x^2/2}{x^4} \tag{84}$$

$$= \frac{\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}{x^4} \xrightarrow{x \to 0} \frac{(-1)^2}{4!} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} \tag{85}$$

b) Das uneigentliche Integral $I(x)$ existiert (aus Hinweis). $I(x)$ ist Stammfunktion von $f(t) = \frac{e^t - 1}{t}$ und es gilt $I'(x) = f(x)$. Insbesondere

$$I'(\ln(x)) = \frac{x - 1}{\ln(x)}. \tag{86}$$

Die Darstellung als Potenzreihe erfolgt über die Exponentialfunktion

$$I(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} - \frac{1}{t} dt = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k \cdot k!} \right]_{t=1}^{t=x} - \ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!} - \ln(x) \tag{87}$$

Daraus folgt dann sofort

$$I'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} - \frac{1}{x} = \frac{e^x - 1}{x} \Rightarrow I'(\ln(x)) = \frac{x - 1}{\ln(x)} \tag{88}$$

c) Über die Definition der Exponentialreihe bekommen wir

$$\exp(2x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^{3k} \tag{89}$$

Die Taylor-Reihe an der Stelle $x_0 = 0$ ist folgendermaßen definiert

$$T_n(x_0, f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n \tag{90}$$

Durch Vergleich mit der Reihendarstellung von f können wir nun $f^{(n)}$ folgern für beliebige $n \in \mathbb{N}$. Wir bekommen für $n = 300/3 = 100$ den Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{100}}{100!} x^{300} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(300)}(0)}{300!} x^{300} \tag{91}$$

Daraus folgt

$$f^{(300)}(0) = \frac{2^{100} 300!}{100!} = 2^{100} \frac{300!}{100!} \tag{92}$$

Das ist eine sehr hohe Zahl!

7 Vollständige Induktion und Taylorformel Beweisen Sie die Taylorformel mit Restgliedabschätzung:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt \tag{93}$$

wobei $I \subset \mathbb{R}, x_0 \in I, f : I \to \mathbb{R}$, f $n+1$-mal stetig differenzierbar. Hinweis: Integrieren Sie partiell!

Lösung: Siehe Vorlesung Skript Woche 15. $n = 0$:

$$f(x) = f(a) + \int_{a}^{x} f'(t) dt \Leftrightarrow \text{(HDI)} \tag{94}$$

$n \to n + 1$:

$$f(x) - T_{n-1} f(x; a) = R_n(x; a) \overset{I.V.}{=} \frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{x} (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt \tag{95}$$

mit partieller Integration erhalten wir

$$\left[-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)\right]_a^x + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^(n+1)(t)dt = f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_{n+1}(x;a) \quad (96)$$

Abschätzung des Restglieds: o.B.d.A $a \leq x$

$$|R_{n+1}(x;a) \leq \frac{1}{n!}\sup_{t\in[a,x]}|x-t|^n|f^{(n+1)}(t)|\int_a^x dt \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{n!}\sup_{t\in[a,x]}|f^{(n+1)}(t)| \quad (97)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to a}\sup \frac{|R_{n+1}(x;a)|}{|x-a|^{n+1}} < \infty \quad (98)$$