Übungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 4
Wintersemester 2016/2017

1 Legendre-Transformation Die Legendre-Transformation ist für Physiker von enormer Bedeutung. Man kann die sog. „Hamilton-Funktion" $H(p)$, die vom Impuls p und dem Ort q abhängt, durch Legendre-Transformation in die sog. „Lagrange-Funktion" $L(\dot{q})$ umwandeln. Die Transformation lautet:

$$\mathcal{L}\{H(p)\} = L(\dot{q}) \tag{1}$$

Hinweis: Die Legendre-Transformation ist definiert als

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(g) = \sup_{x\in I}(gx - f(x)) \tag{2}$$

Wobei $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist. Wir nehmen die Konvexität von H hier als gegeben an!
Berechnen Sie die Legendre-Transformation der Funktion

$$H(p) \quad = \quad \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{3}$$

2 Sätze und Aussagen

2.1 Mittelwertsatz (MWS)

a) Überprüfen Sie für die folgenden Funktionen die Anwendbarkeit des MWS:

- $f_1(x) = -(6x + 24)^{-3}, x \in \mathbb{R}$
- $f_2(x) : [0, \infty) \to (-\infty, \infty),\ x \mapsto \begin{cases} -(x+2)^{-3} & \text{für } x \in [0, 4] \\ -1/216 & \text{für } x > 4 \end{cases}$

b) In der Elektrodynamik benötigt man oft die Abschätzung

$$g(x) := \frac{a}{\sqrt{r^2 + x^2 + rx\cos\theta}} \leq \frac{a}{r}\left(1 + \frac{x}{r}\cos\theta\right) \tag{4}$$

mit $a, \theta, r, x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass diese für alle $x > 0$ gilt!

c) Berechnen Sie die ersten drei Terme der Taylor-Entwicklung von $g(x)$ um $x = 0$ und drücken Sie die Restterme durch ein geeignetes Landau-Symbol aus.

2.2 Fixpunktsatz Das Heron-Verfahren verwendet zur Berechnung der Quadratwurzel einer reellen Zahl $a > 0$ die Funktion $\Phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$. Diese ist gegeben durch die Vorschrift

$$\Phi : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \tag{5}$$

Warum besitzt Φ einen Fixpunkt $x_0 = \Phi(x_0),\ x_0 \in \mathbb{R}^+$? Nennen Sie diesen! Zeigen Sie, dass Φ Lipschitz-stetig ist und geben Sie die Lipschitz-Konstante an.

2.3 Absolute Konvergenz von Reihen Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) Eine Reihe konvergiere. Daraus folgt: sie konvergiert sogar absolut!

b) Eine Reihe konvergiere absolut. Daraus folgt: sie konvergiert.

c) Eine Reihe konvergiere nicht absolut. Daraus folgt: sie konvergiert nicht.

d) Wenn der Mond ein gelber Käse ist, ist 6 eine Primzahl.

3 Funktionenfolgen Man kann den Mittelwertsatz auch dafür benutzen, um die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen $f_n(x)$ zu widerlegen. Beurteilen Sie, ob die Abschätzung

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \tag{6}$$

für eine beliebige Funktionenfolge $f_n(x) : D \to M$ und eine beliebig gewählte Folge von x-Werten $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D$ gilt. Wie hilft diese Abschätzung bei der Widerlegung gleichmäßiger Konvergenz? Kann man die Abschätzung auch dafür verwenden, um gleichmäßige Konvergenz zu beweisen?

4 Abschätzung Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ gilt:

$$|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a - b| \tag{7}$$

5 Stetige Fortsetzbarkeit Wie bereits in einem vorherigen Übungsblatt gesehen, stellen die fünften Einheitswurzeln (Lösungen von $z^5 = 1$) die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks dar. Wir wollen im Folgenden die Funktion:

$$f(z) : \mathbb{C} \setminus \{1 + 0i\} \to \mathbb{C}, f : z \mapsto \frac{z^5 - 1}{z - 1} \tag{8}$$

- Finden Sie eine stetige Fortsetzung $g(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von f in $z = 1$!
- Ist die Funktion injektiv/surjektiv? Ist ihre Fortsetzung injektiv/surjektiv?

- Zeigen Sie, dass die Nullstellen von g genau $(-1/4 \pm \sqrt{5}/4)$ im Realteil entsprechen. Hinweis: Substituieren Sie $t := z + 1/z$, um das Polynom g auf ein Polynom zweiten Grades zurückzuführen. Hiermit können Sie zeigen, dass die bereits ohne Beweis verwendeten Beziehungen

$$\begin{aligned} 2\cos(2\pi/5) &= -1/2 + \sqrt{5}/2 \quad (9) \\ 2\cos(4\pi/5) &= -1/2 - \sqrt{5}/2 \quad (10) \end{aligned}$$

  tatsächlich gelten!

6 Konvergenzradius Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k - g(z) \quad (11)$$

Wobei $g(z)$ die stetige Fortsetzung aus der vorherigen Aufgabe ist. Hier gelte $z \in \mathbb{R}$.

- Geben Sie den Konvergenzradius an.
- Für welche $z \in \mathbb{R}$ konvergiert/divergiert die Reihe?
- Hat die Folge

$$a_k := z^k - g(z), \;\; k = 0, 1, 2, 3 \ldots \quad (12)$$

  ein Maximum/Supremum bzw. ein Minimum/Infimum? Hat (a_K) Häufungspunkte? Führen Sie ggf. eine Fallunterscheidung durch!

7 Potenzreihendarstellung (Teil 1) Geben Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen an, sowie den Geltungsbereich der Entwicklung.

a) $f(x) = \ln \dfrac{a + bx}{a - bx}$

b) $h(x) = \sin^2(2x)$

c) $j(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1 + z)dz$

(c: Man berechne über die Reihendarstellung des ln und „klassisch“ durch integrieren)

8 Potenzreihendarstellung (Teil 2)

a) Berechnen Sie den Wert von

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$$

b) Berechnen Sie $I'(\ln(x))$ für $I(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt$. Hinweis: $I(x)$ existiert für $x > 1$.

Nennen Sie außerdem die Darstellung von $I(x)$ als Potenzreihe.

c) Berechnen Sie die 300-te Ableitung von $f(x) = \exp(2x^3)$ bei $x = 0$.

9 Vollständige Induktion und Taylorformel Beweisen Sie die Taylorformel mit Restgliedabschätzung:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt \tag{13}$$

wobei $I \subset \mathbb{R}, x_0 \in I, f : I \to \mathbb{R}$, f $n + 1$-mal stetig differenzierbar. Hinweis: Integrieren Sie partiell!