Skript

Ferienkurs Analysis 1

Fabian Hafner und Thomas Baldauf

TUM Wintersemester 2016/17

06.04.2017

Das Skript wurde teilweise übernommen vom Skript des Ferienkurses WS 2014, verfasst von Andreas Wörfel. Fragen können bis zum Abend vor der nächsten Vorlesung an fabian.hafner@tum.de geschickt werden, damit sie intensiver in der Vorlesung behandelt werden können. Die Vorlesung besteht neben dem hier aufgeführten Inhalt aus Wiederholung und Rechnen von Übungsaufgaben an der Tafel.

Inhaltsverzeichnis

0.1 Gamma-Funktion

Ein konkretes, häufig auftretendes Integral ist die Gamma-Funktion $\Gamma(x)$, die für $x > 0 \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann als

Definition: Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Die Gamma-Funktion tritt auch häufig in der Physik auf, z.B. wenn man das Volumen der n-Dimensionalen Einheitskugel berechnen will. Das Volumen, das von $K_X := \{x \in X : \|x\| < 1\}$ eingeschlossen wird, wobei $X = \mathbb{R}^{\ltimes}$ und $\|\cdot\|$ die euklidsche Norm ist, lautet

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \tag{0.1.1}$$

Die Gamma-Funktion hat unter anderem die Eigenschaft $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

1 Integration von Funktionenfolgen

Es macht Sinn, sich zu überlegen, wann das Integral einer Funktionenfolge gegen die Stammfunktion der Grenzfunktion konvergiert. Damit lässt sich nämlich das Rechnen mit Funktionenfolgen mit der Integration vereinbaren. Wir wiederholen folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz: Integration von Funktionenfolgen
Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, f_n konvergiert gleichmäßig gegen f auf $[a, b]$. Dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Dies kann man auch auf Potenzreihen anwenden, da hier über eine Folge (a_n) über n summiert wird. Man kann dann Summe und Integral wegen der Linearität des Integals vertauschen. Sei eine Potenzreihe $P(x)$ gegeben mit

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

und Konvergenzradius $R \in [0, \infty)$. Dann kann man aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit sofort unter Anwendung des vorangehenden Satzes erkennen:

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{\alpha}^{\beta} (x-a)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} \right]_{\alpha}^{\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \left((\beta - a)^{k+1} - (\alpha - a)^{k+1} \right)$$

Dabei erinnern wir uns, dass gilt

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{d}{dx} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \right) = a_1 + 2a_2 x + \dots = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} = a_{k+1} x^k$$

für die Differentiation und

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \int \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \right) dx = \left(a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

für die Integration einer Potenzreihe.

2 Taylorsche Formel und Taylorreie

Mithilfe der Taylorreihe kannman eine n-mal differenzierbare Funktion f in eine Potenzreihe entwickeln. Da wir im Kapitel zu Folgen und Reihen gesehen haben, dass Potenzreihen ein mächtiges Werkzeug sind, und es oft in der Praxis genügt, die ersten Glieder der Reihe zu berechnen, ist die Taylorreihe sehr hilfreich.

$f : I \to \mathbb{R}$ n-mal diff.bar in $a \in I \subset \mathbb{R}$

$$T_n f(x; a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

heißt Taylorpolynom der Ordnung n von f um a.

Wir sehen, dass das Taylorpolynom ersten Grades immer eine lineare Approximation von f darstellt (vgl. Skript Mittwoch). Die lineare Approximation ist ein wichtiges Werkzeug, zum Beispiel bei der Berechnung von Schwingungszuständen. Eine Schwingung wird in der klassischen Mechanik oftmals durch kleine Auslenkungen x um einen Gleichgewichtspunkt x_0 beschrieben. Ist $(x - x_0)$ klein, so kann eine Näherungsformel verwendet werden. So geht man z.B. auch bei der Untersuchung der Schwingung von Kristallatomen in der Festkörperphysik vor.

Satz von Taylor
Sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I), I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für

$$x, a \in I : f(x) = T_n f(x;a) + R_{n+1}(x;a)$$

wobei

$$R_{n+1}(x;a) := \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Insbesondere:

$$R_{n+1}(x;a) = \mathcal{O}\left((x-a)^{n+1}\right), (x \to a)$$

Man kann das Restglied auf verschiedene Weisen abschätzen. Eine Möglichkeit ist das Lagrange-Restglied:

Lagrange-Restglied
Unter den Voraussetzungen des Satzes von Taylor.

$$\exists \xi \in [\min(a,x), \max(a,x)] : R_{n+1}(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

Es kommt nun folgende Fragestellung auf: ist es möglich, eine Funktion „exakt zu approximieren“ d.h. eine Darstellung als unendliche Reihe zu finden, sodass die Reihe gegen die Funktion selbst konvergiert? Eine solche Reihe nennen wir Taylor-Reihe und wir definieren:

Definition: Taylor-Reihe
Für $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ und $a \in I \subset \mathbb{R}$ heißt

$$Tf(x;a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Taylorreihe von f um a.

Satz: Eindeutigkeitssatz
Sei $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0,\infty]$. Dann stimmt die Taylorreihe von $f : (a-R, a+R) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ um a mit f überein:

$$Tf(x;a) = f(x) \ \forall |x-a| < R$$

Man kann folgende Äquivalenz ausdrücken:

$$f \text{ wird durch ihre Taylorreihe dargestellt} \Leftrightarrow \text{das Restglied verschwindet für } n \to \infty$$

Es kann passieren, dass

- die Taylorreihe nicht im ganzen Definitionsbereich von f konvergiert
- die Taylorreihe (überall) konvergiert, aber für $x \neq x_0$ nicht gegen $f(x)$!