Übungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 3

Wintersemester 2016/2017

1. Stetigkeit und Konvergenz:

1.1 Stetigkeit Man definieren für eine Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ folgende Aussage mathematisch korrekt:

„g ist stetig in x_0“

Man zeige mit dieser Definition, dass $g(x) := 1/x$ in $x_0 = 1$ stetig ist (optional bietet es sich an, $|x-1| \leq 1/2$ zu wählen (warum darf man das?)). Man nehme nun an, dass $g(x)$ auf $(0, \infty)$ stetig ist. Man begründe kurz, warum $g(x)$ auf dem Intervall $(1, \infty)$ (nicht) Lipschitz- und/oder gleichmäßig stetig ist. Was gilt für das Intervall $(0, 1]$?

Lösung:

Die Aufgabenstellung legt nahe, die ϵ-δ-Definition zu verwenden:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in (0, \infty) \text{ mit } |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Da es sich bei der Stetigkeit um eine *lokale* Definition handelt, dürfen wir annehmen:

$$|x-1| \leq \frac{1}{2}$$

Man wähle nun

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right\}$$

Diese Wahl ist natürlich nicht selbstverständlich, man kann dies erst im Grunde nach der Rechnung so hinschreiben (also nachdem man die Abschätzung durch 2δ hat). Es gilt:

$$|f(x) - f(1)| = |1/x - 1| = \frac{|x-1|}{|x|}$$

$$|x| = |1 - (1-x)| \overset{\Delta\text{-Ungleichung}}{\geq} 1 - |x-1| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(1)| \leq \frac{|x-1|}{|x|} \leq \frac{2}{1}|x-1| \leq 2\delta$$

Die Minimumsdefinition für δ ist notwendig, da man auch theoretisch $\epsilon > 1/2$ wählen kann, aber dann δ aufgrund der Voraussetzung $|x-1| \leq 1/2$ nicht größer als $1/2$ sein kann.

Im Intervall $(1, \infty)$ gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|} \leq 1 \cdot |x - x_0|$$

Die Funktion ist also Lipschitz-stetig mit $L = 1$.
Im Intervall $(0, 1]$ stellen wir fest:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

also ist weder gleichmäßige noch Lipschitz-Stetigkeit möglich.

1.2 Funktionenfolgen Gegeben seien die Funktionenfolgen

a) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-(x-n)^2}$, $D = [-1, 1]$

b) $g_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $D = \mathbb{R}$

c) $h_n(x) = n \cos^n(x) \sin(x)$, $D = (a, \pi/2)$ mit $0 < a < \pi/2$

Man untersuche:

- Punktweise Konvergenz
- Gleichmäßige Konvergenz
- Für welche Werte von a konvergiert h_n gleichmäßig?

Hinweis: $\sin(\arctan(x))/x \to 1$ für $x \to 0$.

Lösung:
a) Wir prüfen zunächst auf punktweise Konvergenz:

$$\lim_{n \to \infty} (f_n(x) - 0) = \lim_{n \to \infty} \left(\left(\mathrm{e}^{-(x-n)^2}\right)\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{e}^{-n^2+2nx}\right) = 0 \tag{1}$$

$f_n(x)$ konvergiert also punktweise gegen die 0 auf $[-1, 1]$. Für die gleichmäßige Konvergenz gilt

$$\sup_{x \in D} f_n(x) = \sup_{x \in D} \left| e^{-(x-n)^2} - 0 \right| = \left| \mathrm{e}^{-(1-n)^2} \right| \tag{2}$$

Die Funktionenfolge ist eine „Gaussche Glockenkurve“ mit Maximum bei $f_n(x = n) = 1$. Da der Definitionsbereich von x allerdings auf das Intervall $[-1, 1]$ eingeschränkt ist, wird dieses Maximum nur für $n \in \{0, 1\}$ auf $[-1, 1]$ angenommen. Die Funktion ist für

$x < n$ monoton steigend, weshalb das Maximum für $n > 1$ immer genau am Rand $x = 1$ angenommen wird, und beträgt dort $f_n(x = n) = \exp(-(1-n)^2)$. Wir zeigen gleichmäßige Konvergenz durch Grenzwertbildung:

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f_n(x) - 0| = \lim_{n\to\infty} \left| \mathrm{e}^{-(1-n)^2} \right| = 0 \tag{3}$$

b) Punktweise Konvergenz können wir wieder zeigen durch

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos(nx)}{n^2} \right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \tag{4}$$

Darüber hinaus

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} - 0 \right| \leq \lim_{n\to\infty} \left| 1/n^2 \right| = 0 \tag{5}$$

Damit konvergiert die Funktionenfolge sogar gleichmäßig gegen 0 auf ganz $\mathbb{R}$.
c) Punktweise Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} (n \cos^n(x) \sin(x)) = \sin(x) \lim_{n\to\infty} (n \cos^n(x)) = 0, \tag{6}$$

da $\cos(x) < 1$ für alle möglichen Werte:

$$\text{für } \alpha := \cos x \in (0,1) : \lim_{n\to\infty} n \cos^n(x) = \lim_{n\to\infty} n\alpha^n = 0 \tag{7}$$

Die Funktionenfolge konvergiert demnach punktweise gegen 0.
Wir prüfen gleichmäßige Konvergenz. Dazu müsse wir zuerst wissen, wo h_n maximal wird.

$$\frac{\mathrm{d}h_n(x)}{\mathrm{d}x} = n \cos^{n-1}(x) \left(\cos^2(x) - n \sin^2(x) \right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow x_0(n) = \arctan \left(1/\sqrt{n} \right) \tag{9}$$

Mit $\sigma = 1/\sqrt{n}$ und der Annahme $a < x_0$ folgt:

$$\lim_{\sigma\to 0} \sup_{x\in(0,\pi/2)} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x_0)| \tag{10}$$

$$= \lim_{\sigma\to 0} \left| \frac{1}{\sigma^2} \cos^{1/\sigma^2}(\arctan(\sigma)) \sin(\arctan(\sigma)) \right| \tag{11}$$

Mit dem Hinweis aus der Angabe folgt:

$$\lim \sigma \to 0 \sup_{x\in(0,\pi/2)} |f_n(x)| = \lim_{\sigma\to 0} \left| \frac{1}{\sigma} \cos^{1/\sigma^2}(\arctan(\sigma)) \right| \tag{12}$$

$$= \lim_{\sigma\to 0} \left| \frac{1}{\sigma} \right| = \infty \tag{13}$$

Die Funktionenfolge konvergiert also nicht gleichmäßig auf dem Intervall $(0, \pi/2)$, also wenn das Maximum angenommen werden kann.
Damit gleichmäßige Konvergenz gegeben ist, muss gelten $a > x_0$, d.h. wenn man das Maximum auf $(0, \pi/2)$ aus dem Definitionsbereich ausschließt. Die Funktion ist monoton fallend für auf $(a, \pi/2)$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(a,\pi/2)} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(a)| \overset{\text{punktw. konv. in } a}{=} 0 \tag{14}$$

Auf $[a, \pi/2)$ können wir also gleichmäßige Konvergenz zeigen, für alle $a \in (0, \pi/2)$.

2. Differentialrechnung:

2.1 Ableitung Man berechne die Ableitung folgender Funktionen:

a) $f_1(x) = x^{x^x}$, $D = (0, \infty)$

b) $f_2(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$, $D = (-1, 1)$

c) $f_3(x) = \arcsin(\cos(x))$, $D = (-\pi, 0)$

d) $f_4(x) = (\ln(1 + |x|))^2$, $D = \mathbb{R}$. Sie dürfen ohne Beweis davon ausgehen, dass f_4 im Ursprung differenzierbar ist. Ist $f_4'(x)$ stetig?

Lösung:
(a)

$$x^{x^x} = x^{e^{x\ln(x)}} = e^{\ln(x)\, e^{x\ln(x)}}$$

$$\Rightarrow f_1'(x) = e^{\ln(x)\, e^{x\ln(x)}} \left[\frac{1}{x} e^{x\ln(x)} + \ln(x)\, e^{x\ln(x)} \left(x\frac{1}{x} + \ln(x) \right) \right]$$

$$= x^{x^x} x^x \left(\frac{1}{x} + \ln^2(x) + \ln(x) \right)$$

(b)

$$f_2'(x) = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{4x}{x^4-1}$$

(c)

$$f_3' = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \frac{-\sin(x)}{|\sin(x)|} = 1$$

(d)

$$f_4'(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)^2}{1+x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\frac{\ln(1-x)^2}{1-x} & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad \left(= \frac{2x\ln(1+|x|)}{x^2+|x|} \right)$$

f_4' ist für $x \neq 0$ stetig als Komposition stetiger Funktionen. Bei 0 gilt

$$\lim_{x\to 0} f_4'(x) = \pm\frac{\ln 1}{1} = 0$$

unabhängig von der Richtung, also ist f_4' auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Kurze Beweise

(a) Man zeige allgemein, dass die Ableitung einer geraden Funktion ungerade ist.

(b) Man zeige: Ist die Ableitung einer Funktion $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ beschränkt, so ist die Funktion Lipschitz-stetig.

Lösung:
(a) Für eine gerade Funktion gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

Wir leiten beide Seiten ab:

$$f'(-x)\cdot(-1) = f'(x) \quad \Rightarrow f'(-x) = -f'(x)$$

$f'(x)$ ist also ungerade.
(b) Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein x_0 so, dass:

$$f(x) - f(y) = f'(x_0)(x-y)$$

wobei $x, y \in [a, b]$ und wir o.B.d.A. annehmen, dass $x < y$. Wir nehmen auf beiden Seiten den Betrag:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(x_0)||x - y|$$

und definieren

$$L = \max_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)|$$

L existiert und ist endlich nach Voraussetzung. Wir erhalten schließlich:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(x_0)||x - y| \leq \max_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)||x - y| = L|x - y|$$

Die Funktion ist also Lipschitz-stetig.

n-te Ableitung (∗) Man zeige durch vollständige Induktion, dass für die n-te Ableitung des Produkts zweier differenzierbarer Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(f_1 f_2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_1^{(k)} f_2^{(n-k)}, \quad f^{(0)} = f \tag{15}$$

gilt. Man berechne damit $g^{(2017)}$ für $g(x) = x^3\, \mathrm{e}^x$. *Hinweis:* $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Lösung:

Induktionsanfang: $n = 1$: $(f_1 f_2)' = f_1 f_2' + f_1' f_2$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$:

$$
\begin{aligned}
(f_1 f_2)^{(n+1)} &= \left((f_1 f_2)^{(n)}\right)^{(1)} \overset{\text{I.V.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f_1^{k+1} f_2^{n-k} + f_1^{k} f_2^{n-k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_1^{(k+1)} f_2^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_1^{(k)} f_2^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f_1^{(k)} f_2^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_1^{(k)} f_2^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f_1^{(k)} f_2^{(n-k+1)} + \binom{n}{n} f_1^{(n+1)} f_2^{(0)} \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f_1^{(k)} f_2^{(n-k+1)} + \binom{n}{0} f_1^{(0)} f_2^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f_1^{(k)} f_2^{(n-k+1)} \\
&+ \binom{n+1}{n+1} f_1^{(n+1)} f_2^{(0)} + \binom{n+1}{0} f_1^{(0)} f_2^{(n+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{Hinweis}}{=} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f_1^{(k)} f_2^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f_1^{(n+1)} f_2^{(0)} + \binom{n+1}{0} f_1^{(0)} f_2^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f_1^{(k)} f_2^{(n+1-k)}
\end{aligned}
$$

Für die Funktion g definieren wir:

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = \mathrm{e}^x$$

Offensichtlich ist $f_1^{(k>3)} = 0$, damit gilt

$$
\begin{aligned}
g^{(2017)} &= x^3\,\mathrm{e}^x + \binom{2017}{1} 3x^2\,\mathrm{e}^x + + \binom{2017}{2} 6x\,\mathrm{e}^x + \binom{2017}{3} 6\,\mathrm{e}^x \\
&\left(= \mathrm{e}^x \left(x^3 + 6051x^2 + 6099408x + 409676880\right)\right)
\end{aligned}
$$

Stetige Differenzierbarkeit Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x}, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und berechne $f^{(n)}(0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

Lösung:
Für $x \neq 0$ ist f beliebig oft stetig differenzierbar als Komposition beliebig oft stetig differenzierbarer Funktionen. Wegen

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

ist f im Ursprung stetig. Da für $x \in (-\infty, 0]$ $f(x) = 0$ existiert der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^-} f^{(n)} = 0$$

Für $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, \quad f^{(n)}(x) = p_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

wobei p_{2n} ein Polynom der Ordnung $2n$ in $1/x$ ist. Dies kann man über Induktion zeigen:
Induktionsanfang: $n = 1$: siehe oben f'
Induktionsschritt: $n \to n+1$:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(p_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)' = \left(-\frac{1}{x^2}p'_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}p_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-\frac{1}{x}} = p_{2n+2}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

Für die Ableitung im Ursprung gilt

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} p_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$$

3. Integration:

3.1 Riemann-Integral Man zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln 2$$

indem man die rechte Seite als Integral schreibt und die Summen auf der linken Seite als Integrale bestimmter Treppenfunktionen versteht. Man drücke also das Integral als Summe von Treppenfunktionen $f(x_k)$ (gewichtet mit ihrer Breite) mit äquidistanten Abständen $x_k = x_0 + x_1 \cdot k/n$, $k = 1, \ldots n$ aus.

Lösung:
Die rechte Seite lässt sich schreiben als

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Die rechte Seite soll also als Treppenfunktion gleichmäßig gegen die Fläche unter $1/x$ konvergieren. Man wähle hierzu $x_k = 1 + k/n$ mit $k = 1, \ldots n$. Die (von unten approximierende) Treppenfunktion lautet dann:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x_{k+1}}$$

Sei $x \in [1,2]$, dann gilt

$$|f(x)-\varphi_n| = \frac{1}{x}-\frac{1}{x_{k+1}} \leq \frac{1}{x_k}+\frac{1}{x_{k+1}} = \frac{x_{k+1}+x_k}{x_k x_{k+1}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{n}$$

Also konvergiert φ_n gleichmäßig. Daraus folgt:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

3.2 Integrale berechnen Man bestimme den Wert folgender Integrale

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x, \quad I_3 = \int_0^1 \cos(\arcsin(x))\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Lösung:

$$I_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \arctan x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}$$

Für das 2. Integral ist die Substitution $u = \tan(x/2)$ zielführend, gefolgt von einer Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1+u^2}{1-u^2} \frac{2}{1+u^2} \,\mathrm{d}u = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{(1-u)(1+u)} \,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) \mathrm{d}u = \ln|1+u| - \ln|1-u| \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \ln \left| \frac{1+1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}} \right| - \ln|-1| = \ln \left| \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \right| \end{aligned}$$

Für das dritte Integral substituieren wir $x = \sin y, \mathrm{d}x = \cos y \,\mathrm{d}y$:

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \frac{\sin y}{\cos y} \cos y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2y) \,\mathrm{d}y = \frac{-1}{4} \cos(2y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

3.3 Uneigentliche Integrale Man untersuche ob folgende uneigentliche Integrale existieren (man muss sie nicht zwingend berechnen!)

$$I_1 = \int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x, \quad (*)\, I_3 = \int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| \mathrm{d}x$$

Lösung:

I_1 existiert. Die Stammfunktion von $\ln x$ lautet $x \ln x - x$. Zu betrachten ist die untere Grenze:

$$I_1 = \lim_{u \to 0} (1 \ln 1 - 1 - u \ln u + u) = - \lim_{u \to 0} u \ln u - 1 = -1$$

I_2 existiert. Partielle Integration liefert

$$\int_\pi^u \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{-\cos x}{x} \Big|_\pi^u - \int_\pi^u \frac{-\cos x}{-x^2} \,\mathrm{d}x = -1 - \frac{\cos u}{u} - \int_\pi^u \frac{\cos x}{x^2} \,\mathrm{d}x$$

Das letzte Integral existiert, da $|\cos x/x^2| \leq 1/x^2$. Damit folgt, dass

$$I_2 = -1 - \lim_{u \to \infty} \frac{\cos u}{u} - \int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^2} \,\mathrm{d}x = -1 - \int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^2}$$

existiert.

I_3 existiert nicht. Um das zu sehen, müssen wir das Integral aufspalten in Intervalle $(k\pi, (k+1)\pi)$. In jedem Intervall ist dann $1/x$ größer als der rechte Rand $1/((k+1)\pi)$. Damit folgt:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \, \mathrm{d}x = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

Also gilt

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geq \int_\pi^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{2}{(n+1)\pi}$$

Die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$$

divergiert (harmonische Reihe), also ist das Integral auch divergent.