Übungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 3

Wintersemester 2016/2017

I. Stetigkeit und Konvergenz:

1. Man definieren für eine Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ folgende Aussage mathematisch korrekt:

   'g ist stetig in x_0'

   Man zeige mit dieser Definition, dass $g(x) := 1/x$ in $x_0 = 1$ stetig ist (optional bietet es sich an, $|x - 1| \leq 1/2$ zu wählen (warum darf man das?)). Man nehme nun an, dass $g(x)$ auf $(0, \infty)$ stetig ist. Man begründe kurz, warum $g(x)$ auf dem Intervall $(1, \infty)$ (nicht) Lipschitz- und/oder gleichmäßig stetig ist. Was gilt für das Intervall $(0, 1]$?

2. Gegeben seien die Funktionsfolgen

   (a) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-(x-n)^2}$, $D = [-1, 1]$

   (b) $g_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $D = \mathbb{R}$

   (c) $h_n(x) = n \cos^n(x) \sin(x)$, $D = (a, \pi/2)$ mit $0 < a < \pi/2$

   Man untersuche:

   - Punktweise Konvergenz
   - Gleichmäßige Konvergenz
   - Für welche Werte von a konvergiert h_n gleichmäßig? (Hinweis: $\sin(\arctan(x))/x \to 1$ für $x \to 0$.)

II. Differentialrechnung:

1. Man berechne die Ableitung folgender Funktionen:

   (a) $f_1(x) = x^{x^x}$, $D = (0, \infty)$

   (b) $f_2(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$, $D = (-1, 1)$

   (c) $f_3(x) = \arcsin(\cos(x))$, $D = (-\pi, 0)$

   (d) $f_4(x) = (\ln(1 + |x|))^2$, $D = \mathbb{R}$. Sie dürfen ohne Beweis davon ausgehen, dass f_4 im Ursprung differenzierbar ist. Ist $f_4'(x)$ stetig?

2. Kurze Beweise:

   (a) Man zeige allgemein, dass die Ableitung einer geraden Funktion ungerade ist.

(b) Man zeige: Ist die Ableitung einer Funktion $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ beschränkt, so ist die Funktion Lipschitz-stetig.

3. (∗) Man zeige durch vollständige Induktion, dass für die n-te Ableitung des Produkts zweier differenzierbarer Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(f_1 f_2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_1^{(k)} f_2^{(n-k)}, \quad f^{(0)} = f \tag{1}$$

gilt. Man berechne damit $g^{(2017)}$ für $g(x) = x^3\,\mathrm{e}^x$. *Hinweis:* $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

4. Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x}, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und berechne $f^{(n)}(0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

III. Integration:

1. Man zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2$$

indem man die rechte Seite als Integral schreibt und die Summen auf der linken Seite als Integrale bestimmter Treppenfunktionen versteht. Man drücke also das Integral als Summe von Treppenfunktionen $f(x_k)$ (gewichtet mit ihrer Breite) mit äquidistanten Abständen $x_k = x_0 + x_1 \cdot k/n$, $k = 0, \dots n$ aus.

2. Man bestimme den Wert folgender Integrale

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x, \quad I_3 = \int_0^1 \cos(\arcsin(x)) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

3. Man untersuche ob folgende uneigentliche Integrale existieren (man muss sie nicht zwingend berechnen!)

$$I_1 = \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad (*)\, I_3 = \int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$$