

Skript

Ferienkurs Analysis 1

Fabian Hafner und Thomas Baldauf

TUM Wintersemester 2016/17

05.04.2017

Das Skript wurde teilweise übernommen vom Skript des Ferienkurses WS 2014, verfasst von Andreas Wörfel.

Inhaltsverzeichnis

1	Stetigkeit	1
1.1	Funktionenfolgen	2
2	Differentialrechnung	3
2.1	Rechnen mit Ableitungen	4
3	Integration	7
3.1	Definitionen	7
3.2	Rechnen mit dem Riemann-Integral	8
3.3	Integrationstechniken	9
3.4	Spezialfälle	11

1 Stetigkeit

Die meisten Funktionen, mit denen wir es zu tun haben, sind stetig oder zumindest stückweise stetig. Anschaulich kann man sich darunter vorstellen, dass der Graph einer Funktion keine 'Sprünge' macht. Eine mögliche Definition ist

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

also rechter und linker Grenzwert übereinstimmen. Ist eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (D kompakt) in jedem $a \in D$ stetig, so heißt sie auf ganz D stetig. Eine äquivalente Definition ist:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Anschaulich: Ändert man ein wenig am Wert von a , so sollte sich der Funktionswert $f(a)$ auch nicht groß ändern. Dies ist eine lokale Definition. Von **gleichmäßiger Stetigkeit** spricht man, falls die Stetigkeit unabhängig von a gegeben ist. Von **Lipschitz-Stetigkeit** spricht man, falls ein $L > 0$ existiert mit $|f(x) - f(y)| < L$ auf einem Intervall.

Sind zwei Funktionen f, g stetig, so sind auch

$$\lambda f + \mu g, \quad fg, \quad f/g, \quad f \circ g$$

stetig. Wird nach einem Stetigkeitsbeweis gefragt, so reicht es oft die Stetigkeit durch bekannte Funktionen zu zeigen.

Oft kommt es vor, dass eine Funktion an einer Stelle gar nicht definiert ist, in vielen Fällen lässt sie sich dann aber **stetig fortsetzen** durch einen passenden Wert.

Beispiel: Intensitätsverteilung nach Durchgang eines Mehrfachspalts

Mann kann zeigen, dass die Intensität einer Welle nach einem Spaltdurchgang durch

$$I \simeq I_0 \left(\frac{\sin(c \sin \alpha)}{c \sin \alpha} \right)^2$$

beschrieben werden kann. Die Funktion ist für $\alpha = 0$ nicht definiert, da man einen Ausdruck $0/0$ erhält. Mit dem Limes (die L'Hospitalsche Regel kommt später) erkennt man aber ($x = c \sin \alpha$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{x} \stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1} = 1$$

Bei $\alpha = 0$ hat man also die größte Intensität und wir können die Funktion an dieser Stelle stetig fortsetzen. Allgemein muss man jedoch darauf achten, dass rechts und links der selbe Grenzwert rauskommt und setzt deswegen eine allgemeine Folge x_n ein, die gegen die gewünschte Stelle konvergiert.

Wichtige Sätze:

- (1) **Satz von Maximum und Minimum:** Es gibt Stellen $x_{\max}, x_{\min} \in [a, b]$ mit

$$f_{\min} = f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) = f_{\max}$$

- (2) **Zwischenwertsatz:** zu jeden $y \in [f_{\min}, f_{\max}]$ gibt es ein $x^* \in [a, b]$ mit

$$f(x^*) = y$$

Daraus folgt unmittelbar der Nullstellensatz: ist $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so gibt ein \tilde{x} mit

$$f(\tilde{x}) = 0$$

- (3) **Fixpunktsatz:** Ist $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig, so existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) = x_0$$

1.1 Funktionenfolgen

Eine Folge von Funktionen $f_n : M \rightarrow N$ **konvergiert punktweise** gegen eine Grenzfunktion f , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in M$$

Sind alle f_n stetig und konvergieren gleichmäßig

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

so ist auch f stetig.

2 Differentialrechnung

Die Motivation für die Differentialrechnung ist, dass wir einer Funktion an jeder beliebigen, definierten Stelle eine Steigung zuordnen wollen. Wir werden schon bei der Definition sehen, dass uns dies immer dann gelingt, wenn sich in einer kleinen, offenen Kugel um die Stelle die Steigung nicht wesentlich ändert, die Funktion also keinen Knick wie z.B. $f(x) = |x|$ oder Sprungstelle hat.

Definition: Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitung, Differenzierbarkeit

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist:

- der **Differenzenquotient** von $f(x)$ und $f(x_0)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad x = x_0 + h$$

Es handelt sich hierbei um die Steigung der **Sekante** zwischen x und x_0 .

- der **Differentialquotient** bzw. die **Ableitung** von $f(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Wir bezeichnen die Ableitung einer Funktion meist mit $f'(x)$. Sie gibt die Steigung der **Tangente** im Punkt x_0 an.

- Eine Funktion heißt **differenzierbar**, wenn die Ableitung existiert. Das heißt insbesondere ist $|f'(x)| < \infty$ und eindeutig, egal mit welcher Nullfolge wir den Grenzwert bilden (also auch egal ob von links oder rechts).
- Eine Funktion heißt **n -mal differenzierbar**, wenn die n -te Ableitung ($f^{(n)}$) existiert.

Beispiel: Ableitung von $\cos(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h} \\ &= \cos x_0 \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{=0} - \sin x_0 \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}}_{=1} \\ &= -\sin x_0\end{aligned}$$

wobei die Regel nach l'Hospital verwandt wurde.

Folgerung: lineare Approximation

Mit Hilfe von geschickten Umformungen kann man zeigen, dass es für alle differenzierbaren Funktionen eine lineare Approximation gibt, das heißt in einer ϵ -Umgebung um jeden Punkt gibt es eine lineare Funktion, die sich kaum von der tatsächlichen Funktion unterscheidet. Wir können die lineare Approximation darstellen als $f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$. Die Korrekturen sind von der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ für $h \rightarrow 0$. Es handelt sich hierbei um die ersten zwei Terme der Taylor-Entwicklung einer Funktion, die in der nächsten Vorlesung weiter besprochen wird:

$$T_f(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \mathcal{O}(x^2)$$

Korollar: Stetigkeit

Ist eine Funktion differenzierbar in x_0 , so ist sie dort stetig.

2.1 Rechnen mit Ableitungen

Seien $f, g \in \mathcal{C}^1(D)$, dann gilt:

- Summenregel: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- Produktregel: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- Quotientenregel: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Satz: Differentiation der Umkehrfunktion Sei $f \in \mathcal{C}^1(D)$ streng monoton und $f'(x_0) \neq 0$, dann kann man f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzieren mit:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Analog berechnet man höhere Ableitungen:

$$\begin{aligned} (f^{-1})''(y_0) &= \frac{-1}{(f'(f^{-1}(y_0)))^2} f''(f^{-1}(y_0)) (f^{-1})'(y_0) \\ &= \frac{-f''(f^{-1}(y_0))}{(f'(f^{-1}(y_0)))^3} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Korollar: Besondere Ableitungstechniken

In einigen Fällen von nicht elementaren Funktionen ist eine einfache Ableitung ohne den Differentialquotient trotzdem möglich, indem man geschickt (z.B. mit der Exponentialfunktion) umformt oder das Argument mit der Umkehrfunktion substituiert.

Satz: Satz von Rolle

Sei $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ mit $f(a) = f(b)$, wobei $a \neq b$. Dann gibt es $x_0 \in [a, b]$ mit $f'(x_0) = 0$. Das heißt, die Funktion ist entweder konstant auf $[a, b]$ oder sie hat ein Extremum.

Satz: Mittelwertsatz

Sei $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, wobei $a < b$. Dann gibt es $x_0 \in [a, b]$ mit $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$

Korollar: Monotonie

$$f'(x) \begin{cases} \leq 0 \\ < 0 \\ \geq 0 \\ > 0 \end{cases} \implies f(x) \begin{cases} \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton fallend} \\ \text{monoton wachsend} \\ \text{streng monoton wachsend} \end{cases}$$

Satz: Bedingungen für Extrema, Wendepunkte, Flachpunkte, konvexe und konkave Funktionen

Sei $f \in \mathcal{C}^2((a, b))$, $f'(x_0) = 0$ für $x_0 \in (a, b)$

Dann hat f bei x_0

- ein **lokales Maximum**, wenn f dort **konkav** (rechtsgekrümmt) ist, also $f''(x_0) < 0$
oder wenn: $f'(x_0 - \epsilon) > 0$ und $f'(x_0 + \epsilon) < 0$ für kleine $\epsilon > 0$
- ein **lokales Minimum**, wenn f dort **konvex** (linksgekrümmt) ist, also $f''(x_0) > 0$
oder wenn: $f'(x_0 - \epsilon) < 0$ und $f'(x_0 + \epsilon) > 0$ für kleine $\epsilon > 0$

Ist $f \in \mathcal{C}^3((a, b))$, $f''(x_0) = 0$ für $x_0 \in (a, b)$

Dann hat f bei x_0 einen **Wendepunkt**, wenn $f'''(x_0) \neq 0$. Falls $f'''(x_0) = 0$, so muss das Monotonieverhalten von $f''(x_0)$ untersucht werden analog zu Extrema. Ändert sich das Krümmungsverhalten, so liegt ein Wendepunkt vor, andernfalls ein **Flachpunkt**.

Satz: Funktionenfolgen

Man kann zeigen: Konvergiert eine Funktionenfolge f_n gegen eine Funktion f , so gilt dies auch für die Ableitungen.

Satz: Regel von L'Hospital

Sei $f, g \in \mathcal{C}^1(D)$, $g'(x_0) \neq 0$. Dann gilt, falls $f, g \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ oder $f, g \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

Ist jedoch $f', g' \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ oder $f', g' \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$, dann kann man den Satz erneut anwenden, so oft bis das Problem behoben ist.

3 Integration

3.1 Definitionen

Im Gegensatz zum Differenzieren, welches eher eine Fingerübung ist, ist Integrieren ein Kunst. Viele Integrale lassen sich durch genügend Erfahrung lösen. Es gibt einige wenige Techniken, die das Integrieren möglich machen, wenn man die Lösung des Integrals nicht gleich sehen kann. Jedoch ist auch hier Erfahrung von Nöten, um zu sehen, welche Technik anzuwenden ist. Motivation für die Integralrechnung ist, die Fläche unter einer Kurve zu bestimmen.

Definition: Stammfunktion

Sei $F : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar und $F' = f$. Dann heißt F **Stammfunktion** zu f auf I . Zwei Stammfunktionen zu f unterscheiden sich höchstens um eine Konstante.

Definition: Riemann-Integral

Wir können eine Funktion $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ approximieren durch eine Treppenfunktion (stückweise auf konstante Funktionen). Wir teilen hierzu den zu integrierenden Bereich in n Stücke der Länge Δx_k und setzen den entsprechenden Funktionswert der Treppenfunktion als $f(x_k)$. In der Vorlesung wurde die Definition über Ober- und Untersumme gemacht. Hierzu wählen wir gerade den Wert der Funktion am rechten oder linken Rand der Teilung. Dann können wir das **Riemann-Integral** definieren als

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \Delta x_k \cdot f(x_k)$$

Bemerkung: Können wir für eine Funktion feststellen, dass Ober- und Untersumme gegen den gleichen Wert konvergieren, so nennen wir diese Riemann-integrierbar, im folgenden kurz: integrierbar. Es gibt auch Funktionen, die integrierbar aber nicht Riemann-integrierbar sind. Hierfür benötigt man aber das Lebesgue-Integral.

Satz: Integration monotoner und stetiger Funktionen

Ist eine monotone oder stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ definiert, so ist sie integrierbar.

3.2 Rechnen mit dem Riemann-Integral

Wir haben im folgenden (stückweise) stetige Funktionen f und g

- Aufteilen eines Integrals (hierfür reicht stückweise stetig):

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

- Umkehren der Integrationsrichtung (hierfür reicht stückweise stetig):

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

- Linearität des Integrals (hierfür reicht stückweise stetig):

$$\int_a^b (f(x) + kg(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + k \int_a^b g(x) \, dx$$

- Integral über einen Punkt (hierfür reicht stückweise stetig):

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0$$

- Mittelwertsatz der Integralrechnung: es gibt ein $y \in [a, b]$, sodass:

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(y)(b - a)$$

- *Eine* (von a abhängige) Stammfunktion $F(x)$ zu f finden wir mit:

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI):

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

Wir haben Integrale bisher nur auf abgeschlossenen Intervallen I definiert. Wir wollen das nun

verallgemeinern.

Definition: Uneigentliche Integrale

Wir können ein Integral folgendermaßen für offene Intervalle $[a, b)$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definieren:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b} \int_a^\beta f(x) dx$$

Wir können dies analog für ein entsprechendes a definieren. Falls beide Fälle gleichzeitig eintreten, teilen wir das Integral mit den obigen Regeln auf in 2 Bereiche: $(a, c] \cup [c, b)$. Somit haben wir das Problem umgangen, 2 Limiten gleichzeitig lösen zu müssen.

Bemerkung: Trotz unendlicher Integralgrenzen kann der Wert des Integrals endlich sein, und trotz endlicher Intervallgrenzen kann ein Integral unendlich sein.

3.3 Integrationstechniken

Für einige Integrale können wir die Lösung mittels verschiedener Techniken finden.

Manchmal ist es günstig, bei einem Produkt zweier Funktionen, das in der Form $(f' \cdot g)$ geschrieben werden kann, die Ableitung von f auf g zu „schieben“. Hierzu kehren wir die Produktregel der Differentialrechnung $(fg)' = f'g + fg'$ um.

Satz: Partielle Integration

Seien $f, g \in \mathcal{C}^1((a, b))$. Dann ist:

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

Bemerkung: Einige Funktionen können integriert werden, indem sie durch Einfügen einer 1 zu einem Produkt umgeschrieben werden.

Beispiel: Integration des Logarithmus

Wir können den Logarithmus durch partielle Integration integrieren

$$\int_a^b 1 \cdot \ln(x) \, dx = [x \cdot \ln(x)]_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} \, dx = [x \cdot \ln(x)]_a^b - [x]_a^b$$

Oftmals ist es auch leichter, wenn wir zum Integrieren die Funktion durch eine andere ersetzen, die besser zu handhaben ist oder die Geometrie des Problems berücksichtigt. Dies wird im 2. Semester für Koordinatentransformationen besonders relevant sein.

Satz: Integration durch Substitution

Sei $g \in \mathcal{C}^1((a, b))$ und $f \in \mathcal{C}^1((c, d))$, wobei $c = g(a)$ und $d = g(b)$

$$\int_a^b f(g(y))g'(y) \, dy = \int_{c=g(a)}^{d=g(b)} f(x) \, dx$$

andererseits ist mit analogen (angepassten) Voraussetzungen:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{c=g^{-1}(a)}^{d=g^{-1}(b)} f(g(y))g'(y) \, dy$$

Es bieten sich häufig Substitutionen wie $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$ oder $\cosh x$ an.

Bemerkung: Die Ersetzung des dx durch dy kann man sich so merken:

$$x = g(y) \quad \Rightarrow \quad g'(y) = \frac{dx}{dy} \quad \Rightarrow \quad dx = g'(y) \, dy$$

Beispiel: Integration mit Hilfe des Logarithmus

Eine Integral der Form $\frac{g'(y)}{g(y)}$ kann durch die Ersetzung $x = g(y) \Rightarrow dy = \frac{dx}{g'(y)}$ mit Hilfe des Logarithmus gelöst werden:

$$\int_a^b \frac{g'(y)}{g(y)} \, dy = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{x} \, dx = [\ln |x|]_{g(a)}^{g(b)} = [\ln |g(y)|]_a^b$$

Zusatz: Integration mittels Partialbruchzerlegung

Die Partialbruchzerlegung kann angewandt werden, um beliebige gebrochen rationale Funktionen in elementar, logarithmisch oder per arctan integrierbare Ausdrücke zu überführen. Schwierigkeiten können sich jedoch dann ergeben, wenn die Nullstellen des Nenners nicht leicht zu finden sind oder Nennernullstellen einen größeren Grad als 1 haben und erst durch geschicktes Einfügen von zusätzlichen 1en integrierbar werden.

3.4 Spezialfälle

In einigen Fällen gibt es auch nicht-triviale Substitutionen, die eine Integration ermöglichen (jedoch nicht immer der einfachste Weg!). Man findet für eine rationale Funktion R :

- substituiere $t = \sqrt[n]{x+1}$:

$$\int R(x, \sqrt[n]{x+1}) dx = n \int R(t^n - 1, t) t^{n-1} dt$$

- substituiere $t = e^x$:

$$\int R(e^x) dx = \int R(t) \frac{1}{t} dt$$

- substituiere $t = \tan \frac{\varphi}{2}$:

$$\int R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

- substituiere $t = \sinh u$, $t = \cosh u$ bzw. $t = \cos u$ für folgende Fälle:

$$\int R(t, \sqrt{t^2+1}) dt \quad \int R(t, \sqrt{t^2-1}) dt \quad \int R(t, \sqrt{1-t^2}) dt$$