Übungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 2

Wintersemester 2016/2017

1. Richtig oder Falsch? Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Korrigieren bzw. ergänzen Sie falsche Aussagen. Geben Sie in beiden Fällen eine kurze Begründung (in Worten) an:

a) Jede monoton wachsende *(fallende)* Folge (a_n) konvergiert gegen $\sup A$ *(*$\inf A$*)*, wobei $A := \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

b) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

c) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

d) Es seien die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ konvergent mit $b = \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n)$ und $(b_n) \leq (a_n) \leq (c_n)$ für fast alle n. Dann konvergiert auch (a_n) mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = b$.

e) Haben die Folgen (a_n) und (b_n) die Grenzwerte a bzw. b, so gilt: $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

Lösung:

a) falsch. Jede monotone **und beschränkte** Folge (a_n) konvergiert. Der Grenzwert ist dann die kleinste obere bzw. größte untere Schranke, d.h. $\sup A$ bzw. $\inf A$.

b) richtig. *Beweis:*
Sei a der Grenzwert und N ein Index mit $|a_n - a| < 1$ für $n > N$, dann gilt $|a_n| \leq max\{|a| + 1, |a_1|, \ldots, |a_N|\}$ für alle n.

c) falsch. Gegenbeispiel $a_n = (-1)^n$

d) richtig (Sandwich-Kriterium)

e) Gilt nur für $b \neq 0$. Dann sind fast alle $b_n \neq 0$.

2. Folgen und Reihen

2.1 Häufungspunkte Man bestimme die Häufungspunkte von

$$a_n = \sqrt[n]{2} + \cos(n\pi)$$

und konvergente Teilfolgen.

Lösung:

Es ist $\cos(n\pi) = (-1)^n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. Also sind 2 und 1 Häufungspunkte. Die zugehörigen Teilfolgen sind

$$a_{2n} = \sqrt[2n]{2} + 1 \quad (1)$$

$$a_{2n+1} = \sqrt[2n+1]{2} - 1 \quad (2)$$

2.2 Konvergenz (Teil 1) Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert/Konvergenzradius

a) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$

b) $b_n = \dfrac{\sqrt[3]{27n+2} \cdot \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{16n^2-1}}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{ne^n}(x+1)^n$ (Bestimmung des Grenzwerts freiwillig)

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\exp(\mathrm{i}\pi/4) \cdot n!)^2}{(2n)!}$ (hier reicht zu zeigen, dass die Reihe konvergiert)

Lösung:

a) Dritte Binomische Formel anwenden:

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{n \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

b) Höchste Potenz ausklammern:

$$\frac{\sqrt[3]{27n+2}\cdot\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{16n^2-1}}=\frac{\sqrt[3]{27n^3+2n^2}}{\sqrt{16n^2-1}}=\frac{3n^3\sqrt{1+\frac{2n^2}{27n^3}}}{4n\sqrt{1-\frac{1}{16n^2}}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{3}{4}$$

c) Leibnizkriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{ne^n}(x+1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{ne^n}(x+1)^n$$

$\left(\frac{1}{ne^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Damit konvergiert die Reihe. Der Konvergenzradius ist:

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{ne^n}{(n+1)e^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)e}\right|=\frac{1}{e}\Rightarrow\rho=e$$

Um den Grenzwert zu bestimmen erinnern wir uns aus der Vorlesung:

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}x^k \tag{3}$$

Durch Umformen erhalten wir

$$\ln\left(1+\frac{1+x}{e}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{ke^k}(1+x)^k \tag{4}$$

d) Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{i\cdot((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{i\cdot(n!)^2}{(2n)!}}\right|=\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{4}<1\Rightarrow\text{absolut konvergent}$$

2.2 Konvergenz (Teil 2) Für welche $x\in\mathbb{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right]^n(x+1)^n$$

Lösung: Wir verwenden das Wurzelkriterium. Es gilt:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}\left|\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right|^n |x+1|^n} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}\left|\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right||x+1| \tag{5}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}\frac{n-1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}|x+1| \tag{7}$$

$$\to \frac{1}{2}|x+1| \tag{8}$$

Also konvergiert die Potenzreihe für $x \in (-3, 1)$. Am Rand gilt:

$$\frac{2^n}{n^2}\left|\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right|^n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{2(n-1)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}\right)^n \leq \frac{1}{n^2} \tag{9}$$

Nach dem Majoranten-Kriterium konvergiert die Reihe damit bei $x = 1$ und $x = -3$.

2.2 Konvergenz (Teil 3) Man begründe warum die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{2^k}$$

absolut konvergiert und beweise durch vollständige Induktion, dass für die n-te Partialsumme gilt

$$s_n = \frac{1}{9}\left(4+(-1)^n\frac{3n+5}{2^n}\right).$$

Gegen welchen Wert konvergiert die Reihe?

Lösung: Sei $a_n := (n+1)/2^n$. Dann gilt mit dem Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2} \tag{10}$$

Damit konvergiert die Reihe absolut.
Nun zur vollständigen Induktion. Induktionsanfang: $s_0 = 0$ läst sich durch einsetzen leicht verifizieren. Es gelte nun die Induktionsvoraussetzung für n und wir prüfen $n+1$

(Induktionsschritt):

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^n \frac{3n+5}{2^n}\right) + (-1)^{n+1}\frac{n+2}{2^{n+1}} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{9}\left(4 - (-1)^{n+1}\frac{6n+10}{2^{n+1}} + (-1)^{n+1}\frac{9n+18}{2^{n+1}}\right) \tag{12}$$

$$= \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^{n+1}\frac{3(n+1)+5}{2^{n+1}}\right) \tag{13}$$

Den Reihenwert können wir als Grenzwert der Partialsumme berechnen:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{4}{9} \tag{14}$$

2.3 Rekursiv definierte Folge Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}, a_0 = 1$ mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$$

einen Grenzwert besitzt und dieser genau dem goldenen Schnitt entspricht. Zeigen Sie dazu, dass die Folge beschränkt und monoton ist.
Für den goldenen Schnitt $\phi \simeq 1.618$, der ein besonderes Verhältnis zweier Strecken angibt, gilt

$$\frac{1}{\phi} = \frac{\phi}{1+\phi}, \quad \phi > 0.$$

Lösung Wir zeigen die Monotonie. Es gilt:

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \text{ mit } a_0 = 1 \tag{15}$$

Wir beweisen mittels vollständiger Induktion:
Induktionsanfang:

$$a_1 = \sqrt{1+a_0} = \sqrt{2} > a_0 \tag{16}$$

$\Rightarrow$ Induktionsvoraussetzung (I.V.) ist $a_{n+1} > a_n$
Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$a_{n+2} = \sqrt{1+a_{n+1}} \overset{\text{I.V.}}{>} \sqrt{1+a_n} = a_{n+1} \tag{17}$$

Dabei wurde benutzt, dass die Wurzelunktion für $x > 1$ monoton steigt. Außerdem zeigen wir noch Beschränktheit. Wir berechnen zuerst einige Werte:

$$a_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}} < \sqrt{3} \tag{18}$$

$$a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}} < \sqrt{1+\sqrt{3}} < \sqrt{4} \tag{19}$$

Wir nehmen nun an, dass die Folge durch den Wert 2 beschränkt ist (tatsächlich durch den goldenen Schnitt, wir müssen aber nur zeigen, *dass* sie beschränkt ist). Wir beweisen wieder durch vollständige Induktion:
Induktionsvoraussetzung:

$$a_n < 2 \quad \forall n > 1$$

Induktionsanfang: wurde bereits gezeigt.
Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \overset{I.V.}{<} \sqrt{3} < 2 \tag{20}$$

Damit ist die Beschränktheit gezeigt. Die Folge ist beschränkt und monoton, also konvergiert sie. Wir zeigen, dass der Grenzwert der goldene Schnitt ist:

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+a_n} \tag{21}$$

$$a = \sqrt{1+a} \tag{22}$$

$$a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{23}$$

Letztere Gleichung erhält man auch beim Auflösen der angegebenen Gleichung für a. Wir wählen das positive Vorzeichen, da alle a_n größer sind als 1 und die Folge monoton wächst. Deshalb ist $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ kein zulässiger Wert für a. Wir erhalten für den Grenzwert:

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

2.4 Harmonische Reihe Man zeige, dass die (divergente) harmonische Reihe

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

durch entfernen jedes Gliedes, das 0 enthält $(1/10, 1/20, \ldots, 1/101, 102, \ldots)$ konvergent wird.

Lösung:
Zur Anschauung schreibt man die Partialsumme explizit:

$$S_j = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{111} + \frac{1}{999} + \cdots \tag{24}$$

$$< \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{100} + \cdots\right) \tag{25}$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{1} + 9^2 \cdot \frac{1}{10} + 9^3 \frac{1}{100} + \cdots \tag{26}$$

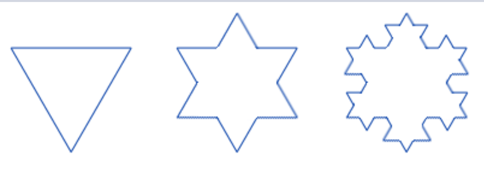
$$= 9 \cdot \left(\left(\frac{9}{10}\right)^0 + \left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdots\right) \tag{27}$$

Damit folgt

$$S_j < 9 \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{9}{10}\right)^l < 9 \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^l = 9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 90 \tag{28}$$

Tatsächlich ist $H \simeq 23.1$.

2.5 Koch-Schneeflocke Die Koch-Schneeflocke ist ein einfaches Beispiel für ein Fraktal. Man geht von einem gleichseitigem Dreieck der Seitenlänge $c = 1$ aus, teilt im Iterationsschritt n jede Seite in drei Teile, nimmt das mittlere Stück weg und ersetzt dies durch ein weiteres gleichseitiges Dreieck mit einem Drittel der ursprünglichen Seitenlänge usw.:



Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt der Schneeflocke (für $n \to \infty$). Was fällt auf? *Hinweis:* Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks beträgt $c^2 \cdot \sqrt{3}/4$. Im n-ten Iterationsschritt kommen $3 \cdot 4^{n-1}$ Dreiecke mit Seitenlänge 3^{-n} hinzu. Ergebnis: $A = 2 \cdot \sqrt{3}/5$.

Lösung:
Wir haben für den Umfang nach dem n-ten Schritt:

$$U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n U_0;\ U_0 = 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow U_n \to \infty$$

Der Umfang der Schneeflocke divergiert also. Wir berechnen die Werte für die Flächeninhalte nach 0,1 und 2 Iterationsschritten:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \tag{29}$$

$$A_1 = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}}_{A_0} + 3 \cdot 4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \tag{30}$$

$$A_2 = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}_{=A_1} + 3 \cdot 4^1 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \tag{31}$$

Oder allgemein:

$$A_{n+1} = A_0 + 3 \cdot 4^{n-1} \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \cdot A_0 \tag{32}$$

Nach unendlich vielen Schritten ist der Flächeninhalt:

$$A_\infty = \lim_{n \to \infty} A_n = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} 3 \cdot 4^{i-1} \left(\frac{1}{3^i}\right)^2 \cdot A_0 \tag{33}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{3^i}\right)^2 4^{i-1} \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1}\right) \tag{34}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{i}\right) \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} \tag{35}$$

Das bedeutet, dass die Kochs-Schneeflocke einen endlichen Flächeninhalt, aber einen unendlichen Umfang hat!