Übungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 2

Wintersemester 2016/2017

1. Richtig oder Falsch? Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Korrigieren bzw. ergänzen Sie falsche Aussagen. Geben Sie in beiden Fällen eine kurze Begründung (in Worten) an:

a) Jede monoton wachsende *(fallende)* Folge (a_n) konvergiert gegen $\sup A$ *(*$\inf A$*)*, wobei $A := \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

b) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

c) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

d) Es seien die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ konvergent mit $b = \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n)$ und $(b_n) \leq (a_n) \leq (c_n)$ für fast alle n. Dann konvergiert auch (a_n) mit $\lim_{n\to\infty}(a_n) = b$.

e) Haben die Folgen (a_n) und (b_n) die Grenzwerte a bzw. b, so gilt: $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

2. Folgen und Reihen

2.1 Häufungspunkte Man bestimme die Häufungspunkte von

$$a_n = \sqrt[n]{2} + \cos(n\pi)$$

und konvergente Teilfolgen.

2.2 Konvergenz (Teil 1) Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert/Konvergenzradius

a) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

b) $b_n = \dfrac{\sqrt[3]{27n+2} \cdot \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{16n^2 - 1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{ne^n}(x+1)^n$ (Bestimmung des Grenzwerts freiwillig)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\exp(i\pi/4) \cdot n!)^2}{(2n)!}$ (hier reicht zu zeigen, dass die Reihe konvergiert)

2.2 Konvergenz (Teil 2) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right]^n (x+1)^n$$

2.2 Konvergenz (Teil 3) Man begründe warum die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{k+1}{2^k}$$

absolut konvergiert und beweise durch vollständige Induktion, dass für die n-te Partialsumme gilt

$$s_n = \frac{1}{9}\left(4 + (-1)^n \frac{3n+5}{2^n}\right).$$

Gegen welchen Wert konvergiert die Reihe?

2.3 Rekursiv definierte Folge Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}, a_0 = 1$ mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$$

einen Grenzwert besitzt und dieser genau dem goldenen Schnitt entspricht. Zeigen Sie dazu, dass die Folge beschränkt und monoton ist.
Für den goldenen Schnitt $\phi \simeq 1.618$, der ein besonderes Verhältnis zweier Strecken angibt, gilt

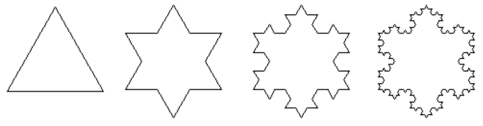
$$\frac{1}{\phi} = \frac{\phi}{1+\phi}, \quad \phi > 0.$$

2.4 Harmonische Reihe Man zeige, dass die (divergente) harmonische Reihe

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

durch entfernen jedes zehnten Gliedes $(1/10, 1/20, \ldots)$ konvergent wird.

2.5 Koch-Schneeflocke Die Koch-Schneeflocke ist ein einfaches Beispiel für ein Fraktal. Man geht von einem gleichseitigem Dreieck der Seitenlänge $c = 1$ aus, teilt im Iterationsschritt n jede Seite in drei Teile, nimmt das mittlere Stück weg und ersetzt dies durch ein weiteres gleichseitiges Dreieck mit einem Drittel der ursprünglichen Seitenlänge usw.:



Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt der Schneeflocke (für $n \to \infty$). Was fällt auf?
Hinweis: Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks beträgt $c^2 \cdot \sqrt{3}/4$. Im n-ten Iterationsschritt kommen $3 \cdot 4^{n-1}$ Dreiecke mit Seitenlänge 3^{-n} hinzu. Ergebnis: $A = 2 \cdot \sqrt{3}/5$.