Skript

Ferienkurs Analysis 1

Fabian Hafner und Thomas Baldauf

TUM Wintersemester 2016/17

04.04.2017

Das Skript wurde teilweise übernommen vom Skript des Ferienkurses WS 2014, verfasst von Andreas Wörfel. Fragen können bis zum Abend vor der nächsten Vorlesung an fabian.hafner@tum.de geschickt werden, damit sie intensiver in der Vorlesung behandelt werden können.

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen und Grenzwerte

1.1 Reelle Folgen und Konvergenz

Eine Folge besteht aus Objekten (genannt Glieder), hier Zahlen aus $\mathbb{R}$, die fortlaufend nummeriert sind. Jedem Glied wird eine (positive, ganzzahlige) Nummer (genannt Index) zugewiesen. Mathematisch korrekt:

Definition: Eine **reelle Folge** ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto a(n) =: a_n$$

Notation: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)$

Bei unendlichen Folgen entsteht das Problem, dass man ein Bildungsgesetz finden muss. Dies kann auf verschiedene Weisen geschehen:

- Angabe einer Funktionsvorschrift
- Angabe einer Rekursionsvorschrift
- Angabe von Anfangsgliedern $\lightning\lightning\lightning$
- Angabe eines Algorithmus (Herausforderung: welches Programm ist am kürzesten?)

Eigenschaften von Folgen:

Definition: Monotonie und Beschränktheit:

- (a_n) (streng) monoton $\left\{\begin{matrix}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{matrix}\right\} :\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \left\{\begin{matrix}(>)\ \geq\\ (<)\ \leq\end{matrix}\right\} a_n$
- (a_n) nach $\left\{\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}\right\}$ beschränkt $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_n \leq M \\ a_n \geq m \end{cases}.$

M heißt obere Schranke und m heißt untere Schranke. Die kleinste obere Schranke heißt Supremum (sup), die größte untere Schranke heißt Infimum (inf). Supremum und Infimum müssen nicht zwingend als Werte angenommen werden! Gilt „=“, so wird das Supremum zum Maximum bzw. das Infimum zum Minimum. Z.B. besitzt $(a_n) := 1/n$ das Supremum und Maximum 1 und das Infimum 0. Jedes Maximum (Minimum) ist immer auch Supremum (Infimum).

Definition: Eine Folge (a_n) heißt alternierend, wenn $a_n \cdot a_{n+1} < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, wenn also benachbarte Folgenglieder verschiedene Vorzeichen haben.

Definition: Eine reelle Folge (a_n) heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(a_n, a) < \epsilon \quad ^{(*)} \tag{1.1.1}$$

Dann liegen fast alle a_n in einer Epsilon-Umgebung um a:

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : a_n \in U_\epsilon(a) \text{ für fast alle n} \in \mathbb{N}$$

$$U_\epsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} | d(x, a) < \epsilon\}$$

In diesem Fall heißt a Grenzwert (oder Limes) und man schreibt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \to a$$

Existiert kein $a \in \mathbb{R}$ welches die Bedingung (1.1.1) erfüllt, heißt (a_n) divergent.

*) *Bem: d ist, wie in der Vorlesung vereinbart, die Euklidsche Metrik (Betrag). Die Definition gilt jedoch auch allgemein für metrische Räume (siehe Def. metrischer Raum).*

Definition:: (a_n) heißt Nullfolge $:\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

1.2 Konvergenzkriterium und Grenzwertarithmetik

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt

Satz: Jede beschränkte, monoton $\begin{Bmatrix} \text{steigende} \\ \text{fallende} \end{Bmatrix}$ reelle Folge konvergiert gegen $\begin{Bmatrix} \sup a(\mathbb{N}) \\ \inf a(\mathbb{N}) \end{Bmatrix}$.

Satz: (Grenzwertarithmetik): “Rechenregeln” für den Limes:
Seien $(a_n), (b_n)$ konvergent mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann:

i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

iii) Falls $b \neq 0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

iv) $a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

v) $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$

vi) $\lim_{n\to\infty} a_n^c = a^c$

Folgende Grenzwerte sollte man kennen:

$$\binom{a}{n} \to 0, a > -1, \qquad \sqrt[n]{a} \to 1, \qquad \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e,$$

$$\frac{a^n}{n!} \to 0, \qquad \sqrt[n]{n} \to 1, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

$$\frac{n^n}{n!} \to \infty, \qquad \sqrt[n]{n!} \to \infty, \qquad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x,$$

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}, \qquad \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \to e^{-x},$$

$$\frac{a^n}{n^k} \to 0 \begin{cases} 0 < a < 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}, \qquad \frac{a^n}{n^k} \to \infty \begin{cases} a > 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$$

1.3 Bestimmte Divergenz, Limes superior und inferior

Definition: Eine reelle Folge (a_n) heißt bestimmt divergent (oder uneigentlich konvergent) gegen $+\infty$, falls

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n \geq k.$$

Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $a_n \to \infty$

Analog heißt (a_n) bestimmt divergent gegen $-\infty$, falls $-a_n \to \infty$
Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $a_n \to -\infty$

Definition: Limes superior und Limes inferior einer reellen Folge (a_n) sind:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}$$

Der Limes inferior ist der kleinste Häufungspunkt, der Limes superior ist der größte Häufungspunkt einer beschränkten reellen Zahlenfolge (mehr dazu siehe Def. Häufungspunkt).

Definition: (a_n) heißt Cauchy-Folge, falls

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : d(a_n, a_m) < \epsilon$$

Satz: (Cauchy-Konvergenzkriterium)
(a_n) ist Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ (a_n) ist konvergent
für $d(a_n, a_m) = |a_n - a_m|$ und (a_n) reelle Zahlenfolge.

Es gilt i.A. außerdem folgender **Satz:**

Ist eine Folge konvergent, so folgt daraus ($\Rightarrow$), dass sie auch Cauchy-Folge ist.

Die Umkehrung gilt i.A. nicht (siehe Def. vollständiger Raum).

Definition: Für Folge (a_n) und eine streng monoton wachsende Folge $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt:

$$a \circ k : \; \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \; n \mapsto a(k(n)) = a_{k_n}$$

Teilfolge von (a_n).

Definition: $x \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n), falls es eine Teilfolge (a_{k_n}) gibt mit $x = \lim_{n\to\infty} a_{k_n}$.

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \; a_n \in U_\epsilon(x) \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; N \in \mathbb{N}; \exists n \geq N : a_n \in U_\epsilon(x)$$

Bemerkungen zu Häufungspunkten:

- Unterschied Grenzwert und Häufungspunkt: Konvergieren *alle* Teilfolgenn einer Folge gegen den selben Wert, so ist dieser der Grenzwert. Bei einem Häufungspunkt muss nur *eine* Teilfolge gegen diesen konvergieren. In einer Epsilon-Umgebung um den Grenzwert liegen *fast alle* Folgenglieder, in einer Epsilon-Umgebung um einen Häufungspunkt „nur” *unendlich viele*. „Fast alle” bedeutet, dass höchstens endlich viele Glieder außerhalb liegen.
- Der Grenzwert ist auch immer Häufungspunkt. In metrischen Räumen ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig und der einzige Häufungspunkt.

Wichtige Aussagen über Häufungspunkte und Teilfolgen liefert der Satz von Bolzano-Weierstraß:

Satz: Bolzano-Weierstraß

- **Version 1**
  Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen (mit unendlich vielen Gliedern) enthält (mindestens) eine konvergente Teilfolge.
- **Version 2**
  Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen (mit unendlich vielen Gliedern) besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt. Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

Man kann die Konvergenz einer Folge auch daran erkennen, wenn die Folge durch zwei konvergente Folgen eingeschlossen wird, die beide gegen den selben Grenzwert streben. Dann nimmt auch die zu untersuchende Folge diesen Grenzwert an.

Satz: Sandwichkriterium
Seien die Grenzwerte a und b der Folgen (a_n) und (b_n) bekannt und sei $a = b$. Dann gilt für eine Folge (c_n) mit unbekanntem Grenzwert und mit $a_n \leq c_n \leq b_n$: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a = b$

Zusammenfassung
Wir können für die Konvergenz folgende Regeln festhalten: Eine Folge konvergiert, wenn

- sie monoton und beschränkt ist (Monotoniekriterium)
- sie das Cauchy-Kriterium erfüllt (und eine reelle oder komplexe Folge ist)
- sie das Einschließungskriterium/Sandwichkriterium erfüllt

1.4 Metrischer Raum

Folgen kann man auch auf metrischen Räumen definieren. Man benötigt dies z.B. für die Konvergenz in der komplexen Ebene oder im 2D.
Die Metrik wurde in diesem Skript bereits vor diesem Abschnitt benutzt. Nun aber noch einmal eine formale Defintion eines metrischen Raumes:

Definition: Eine Menge M mit Abb. $d : M \times M \to \mathbb{R}$ heißt metrischer Raum mit Metrik d, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:

- $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positiv definit)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrisch)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Man nennt $d(x, y)$ den Abstand („distance“) von x und y. Für $\epsilon > 0$ und $a \in M$ heißt $U_\epsilon(a) := \{x \in M | d(x, y) < \epsilon\}$ die ϵ-Umgebung von a.
Spezialfälle: $M = \mathbb{C}, M = \mathbb{R}, M = \mathbb{R}^n, M = \mathbb{C}^n$

Hier auch noch eine wichtige Anmerkung:

Definition: Ein metrischer Raum heißt vollständig, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.
Beispiele: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}$

Das heißt, dass in jedem vollständigen Raum die Begriffe „konvergent“ und „Cauchy-Folge“ äquivalent sind. In nicht vollständigen Räumen ist trotzdem jede konvergente folge Cauchy-Folge (Umkehrung gilt allgemein nicht).

2 Reihen

Zunächst die **Definition:**

Für eine komplexwertige Folge (a_n) bezeichnet die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

die Folge der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, n \in \mathbb{N}.$$

Falls (s_n) konvergiert, so bezeichnet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ebenfalls den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Andernfalls spricht man von einer divergenten Reihe.

Es gelten für Reihen mehrere Konvergenzkriterien. Je nachdem, welche Reihe vorliegt, ist mal das eine, mal das andere anzuwenden.

Satz: Cauchy-Kriterium

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent } \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq m \geq N : \left(\sum_{k=m}^{n} a_k \right) < \epsilon$$

Daraus folgt auch folgender **Satz:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Die Umkehrung ($\Leftarrow$) gilt i.A. nicht (vgl. harmonische Reihe)!

Satz:: Leibniz-Kriterium

Sei (a_n) eine monotone Nullfolge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ mit $a_n \geq 0$. Dann konvergiert

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$$

und es gilt die Fehlerabschätzung: $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k - s_n \right| \leq a_{n+1}$$

2.1 Absolute Konvergenz und Umordnung

Definition: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergiert}$$

Satz: Majorantenkriterium für absolut konvergente Reihen:

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent mit $b_k \geq 0$. Falls $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

Satz: Minorantenkriterium für divergente Reihen:

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ mit positiven Summanden ist divergent, wenn es eine divergente Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ gibt, sodass $a_k \leq x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Satz: Quotientenkriterium:

Sei $a_n \neq 0$ ffa. $n \in \mathbb{N}$.

- $\limsup\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

- $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent
- für $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ keine Aussage möglich!

Es gibt außerdem ein paar Regeln für die Umordnung von Reihen:

Definition: Für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n}$ Umordnung von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Satz: Riemannscher Umordnungssatz:
Für jede konv. Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, die nicht absolut konvergiert, und jedes $\overline{s} \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n}$, die gegen $\overline{s}$ konvergiert.

Satz: Umordnung
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow$ Jede Umordnung konvergiert gegen denselben Grenzwert.

Variante:
A oder B absolut konvergent $\Rightarrow$ für jede Abzählung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} =: S$$

absolut und es gilt:

$$S = A = B =: \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{nm}$$

Satz: Wurzelkriterium

- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent
- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent

- Für $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ keine Aussage möglich!

Beim Rechnen mit Potenzreihen kann man folgende Regeln verwenden

Rechenregeln für konvergente Reihen
Sind $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und ist $r \in R$, so gilt:

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = a + b$ (Addition konv. Reihen)
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r \cdot a_k = r \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = r \cdot a$ (Multiplikation konv. Reihen mit r)

Sind $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = a \cdot b \text{ (Cauchy-Produkt abs. konv. Reihen)}$$

2.2 Potenzreihen

Definition: Jede Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, Variable $z \in \mathbb{C}$ und Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ wird Potenzreihe genannt. Man nennt

$$R := \sup\{|z-a| : z \in \mathbb{C} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \text{ konvergent}\}$$

den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Satz: Sei $R \in [a, \infty)$ Konvergenzradius von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$.

- $|z-a| < R \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ konvergiert absolut

- $|z-a| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ divergiert
- $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (Formel von Cauchy-Hadamard) oder $\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$.

Bemerkung: Die Reihe ist für $|z-a| = R$ explizit auf Konvergenz zu überprüfen. Der obige Satz gilt nur für $|z-a| < R$!

Man kann zum Rechnen mit Potenzreihen folgende Regeln verwenden:

Rechenregeln mit Potenzreihen
Es seien folgende Potenzreihen definiert:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Dann gelten diese Rechenregeln:

- $f(x) \pm g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n = a_0 \pm b_0 + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \ldots$
  (Addition/Subtraktion der Koeffizienten)
- $f(x) \cdot g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (Cauchy-Produkt)
- $\frac{f(x)}{g(x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)$
  (Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten. Bestimme c_n durch Koeffizientenvergleich)
- $f(g(x)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(g(x))^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right)^n$
  (Einsetzen von Potenzreihen ineinander)