Übungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 1

Wintersemester 2016/2017

1 Grundbegriffe

a) Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto \frac{1}{4}(1 - (-1)^n(2n+1)) \tag{1}$$

bijektiv?

b) Man bestimme die Umkehrfunktion, falls möglich:

$$f(x) : (-\infty, 0] \to (0, 1], \quad x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2+1}} \tag{2}$$

Lösung:

a) Die Abbildungswerte lauten $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$, Bijektivität liegt also nahe. Man kann die Abbildungsvorschrift auch so schreiben:

$$n \mapsto \begin{cases} 1/4 \cdot (1 - (2n+1)) = -n/2, & n \text{ gerade} \\ 1/4 \cdot (1 + (2n+1)) = (n+1)/2 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Es ist $f(0) = 0$. Für $k > 0$ ist $f(2k-1) = k$, für $k < 0$ ist $f(-2k) = k$. Damit hat jedes $k \in \mathbb{Z}$ ein Urbild in $\mathbb{N}_0$, die Abbildung ist also surjektiv.
Die Abbildung ist auch injektiv, da aus $f(n) = f(m)$ folgt:

$$(-1)^n(2n+1) = (-1)^m(2m+1) \tag{3}$$

Haben n und m dasselbe Vorzeichen so folgt gleich $n = m$, sind die Vorzeichen unterschiedlich, so folgt $n = -m$, was aber nur im Definitionsbereich liegt, falls $n = m = 0$. Für n gerade folgt ebenfalls $n = m$. In jedem Fall ist also $n = m$, damit ist f insgesamt bijektiv.

b) Damit die Umkehrfunktion existiert, muss $f(x)$ bijektiv sein. Dann lässt sich jedem Element aus der Bildmenge ein entsprechendes (eindeutig bestimmtes) Element aus der

Urbildmenge zuordnen. Diese Zuordnungsvorschrift wird dann in der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ definiert. Wir prüfen, ob $f(x)$ injektiv ist:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) && (4)\\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{1+x_1^2}} &= \sqrt{\frac{1}{1+x_2^2}} && (5)\\ 1+x_2^2 &= 1+x_1^2 && (6)\\ x_2^2 &= x_1^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| && (7) \end{aligned}$$

Da x_1 und x_2 jeweils eine negative reelle Zahl (oder Null) sind, gilt $|x_{1,2}| = -x_{1,2}$ und deshalb folgt $x_1 = x_2 \quad \Rightarrow f$ ist injektiv.
Die Funktion ist zudem surjektiv, wenn es zu jedem $y \in [0,1)$ mindestens ein $x \in (-\infty, 0]$ gibt, für das gilt $f(x) = y$:

$$\begin{aligned} f(x) &= y && (8)\\ \Leftrightarrow y^2 &= \frac{1}{x^2+1} && (9)\\ \Leftrightarrow x^2+1 &= 1/y^2 && (10)\\ \Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{1}{y^2}-1} & && (11) \end{aligned}$$

Da allerdings immer gelten muss $|x| = -x$, weil x eine negative reelle Zahl (oder Null) ist, erhalten wir

$$x = -\sqrt{\frac{1}{y^2}-1} \tag{12}$$

Eine reelle Lösung existiert immer dann für

$$\frac{1}{y^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 1 \tag{13}$$

Weil $y \in [0,1)$, gilt dies für jedes y. Die Funktion f ist also auch surjektiv, und damit bijektiv. Wir können die Umkehrfunktion bilden, und sie lautet:

$$f^{-1}(y) : [0,1) \to (-\infty, -1], \quad y \mapsto \sqrt{\frac{1}{y^2}-1} \tag{14}$$

2 Vollständige Induktion

2.1 Summe von Kubikzahlen Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für die Summe der Dreierpotenzen folgende Relation gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{15}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

Abkürzungen: $I.V.$ = Induktionsvoraussetzung, $I.A.$ = Induktionsanfang, $I.S.$ Induktionsschritt

I.A. Sei $n = 1$:

$$1^3 = 1 = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = 4/4. \tag{16}$$

Für $n = 1$ ist die Bedingung erfüllt.

I.S. Wir gehen über von $n \to n + 1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = (n+1)^3 + \sum_{i=1}^{n} i^3 \overset{I.V.}{=} (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2}{4}\big(4(n+1) + n^2\big) \tag{17}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \tag{18}$$

Induktionsschluss Damit gilt die Induktionsannahme für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Hierbei ist darauaf zu achten, dass die Induktionsvoraussetzung mindestens einmal verwendet wird, sonst kann etwas mit dem Beweis nicht stimmen!

2.2 Ungleichungen (Teil 1) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass stets für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(3n)! > 2^{6n-4} \tag{19}$$

Lösung:

I.A. Sei $n = 0$. Dann gilt

$$0! = 1 > 2^{0-4} \Leftrightarrow 1 > 1/16 \tag{20}$$

Für $n = 0$ ist die Ungleichung erfüllt.
Sei $n = 1$ Dann gilt:

$$3! = 6 > 2^{6-4} \Leftrightarrow 6 > 4 \tag{21}$$

Die Ungleichung gilt ebenfalls für $n = 1$.

I.S. Wir gehen über $n \to n+1$ und versuchen geschickt abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
(3n+3)! &= (3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)! > (3n+1)^3(3n)! && (22)\\
(3n+3)! &\overset{I.V.}{>} (3n+1)^3 \cdot 2^{6n-4} \overset{n>0}{>} 4^3 \cdot 2^{6n-4} && (23)\\
(3(n+1))! &> 2^6 \cdot 2^{6n-4} = 2^{6}n + 2 = 2^{(6(n+1)-4)} && (24)
\end{aligned}$$

Die Abschätzung gilt nur für $n > 0$. Deshalb muss man $n = 0$ und auch $n = 1$ beim Induktionsanfang betrachten.

Induktionsschluss Die gegebene Ungleichung gilt also nach I.A. für $n = 0, n = 1$ und insbesondere für alle $n \geq 1$, und somit für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Hinweis: Bei diesem Induktionsbeweis kommt eine Ungleichung vor. Man geht genauso vor wie bei jedem Induktionsbeweis, es kommt aber meist noch hinzu, dass abgeschätzt werden muss, um zum Ziel zu kommen. Dabei ist das Ziel, dass mathematische Umformungen leichter werden, ohne dass die Ungleichung dabei verletzt wird!

2.2 Ungleichungen (Teil 2) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass stets für alle $n > 3$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt:

$$2^n < n! \tag{25}$$

Lösung:

I.A. Sei $n = 4$. Dann gilt:

$$2^4 = 16 < 24 = 4! \tag{26}$$

I.S.

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{I.V.}}{<} 2 \cdot n! \overset{*}{<} (n+1)n! = (n+1)! \tag{27}$$

$(*)$, da $2 < n+1$ für $n > 3$

$\Rightarrow 2^n > n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

2.3 Bonbon-Spiel (*) Bibi und Tina spielen das Bonbon-Spiel, bei dem die folgenden Regeln gelten: Zu Beginn des Spiels befindet sich eine mit n Bonbons gefüllte Schale auf dem Tisch, aus der Bibi und Tina abwechselnd jeweils nach Wahl ein, zwei oder drei Bonbons herausnehmen. Diejenige, die am Ende kein Bonbon mehr herausnehmen kann wenn sie am Zug ist, weil die Schale bereits leer ist, hat verloren. Bibi beginnt das Spiel und zieht als erste. Beweisen Sie, dass sie für $n \mod 4 \neq 0$ (n nicht durch 4 teilbar oder null) immer gewinnt. Für $n \mod 4 = 0$ verliert sie. Dabei ist n die Zahl der Bonbons jeweils nach einem Zug. Man sagt dann, Bibi hat eine „Gewinnstrategie “, kann also einen Gewinn erzwingen. Hinweis: Verwenden Sie für den Beweis die vollständige Induktion.

Lösung:

Der Füllstand der Bonbon-Schale entscheidet über Gewinn oder Verlust. Das Spiel hat eine endliche Anzahl an Zügen. Man kann dann folgendermaßen beginnen:

I.A. Sei $n = 1 \Rightarrow$ (zu Beginn des Spiels). Bibi hat nur noch die Wahl, das letzte Bonbon aus der Schale zu nehmen. Deshalb hat sie verloren, weil sie nach ihrem Zug eine leere Schale vor sich hat. Diese Tatsache ist mit $(1-1) \mod 4 = 0$ vereinbar!

I.S. Das Spiel sei für $n \mod 4 \neq 0$ gewonnen, also genau für $n = 4k, k \in \mathbb{N}_0$ verloren. Dann gibt es für ein Spiel mit $n+1$ Bonbons nach Bibis zug noch genau

$$n' = n + 1 - a, \; a \in \{1, 2, 3\} \tag{28}$$

Bonbons in der Schale.

- Fall 1 ($a = 1$): Nimmt Bibi genau ein Bonbon, so gilt $n' = n + 1 - 1 = n = 4k \Rightarrow n' \mod 4 = 0$. Damit verliert Bibi (nach der Induktionsvoraussetzung), und n' ist durch 4 teilbar.

- Fall 2 ($a = 2$ oder $a = 3$): $n' = n+1-2 = n-1$ oder $n' = n+1-3 = n-2$. In beiden Fällen gilt: $n' \mod 4 \neq 0$ wegen der Induktionsvoraussetzung ($n \mod 4 = 0$). n' ist also im Fall 2 nie durch 4 teilbar. Bibi gewinnt.

Mit den beiden Fällen sind alle Möglichkeiten des Spielausgangs abgedeckt. Wir stellen fest, dass auch für $n' = n + 1 - a$, also ein Spiel mit anfänglich $n + 1$ Bonbons, folgt zwangsweise, dass neben n auch n' nicht durch 4 teilbar sein darf ($n' \mod 4 \neq 0$), damit Bibi gewinnt.

Induktionssschluss Die Annahme $n \mod 4 \neq 0$ für die Sicherstellung einer Gewinnstrategie Bibis ist für alle Spiele mit beliebiger Anzahl $n \in \mathbb{N}$ an Bonbons gewährleistet.

2.4 Binomialkoeffizient Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass stets für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \tag{29}$$

Hinweis: Sie könenn ohne Beweis verwenden, dass $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Lösung:

I.A. Wir beginnen mit $n = 1$ dann gilt:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = \frac{n!}{0!n!} + \frac{n!}{1!(n-1)!} = 1 + n = 2 = 2^1 \tag{30}$$

I.S Wir schreiben die Summe zunächst in Summenschreibweise:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tag{31}$$

Nun betrachten wir $n \to n + 1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1} \tag{32}$$

$$= \binom{n}{n+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{k}{n} \tag{33}$$

$$\overset{I.V.}{=} 0+2^n+0+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} \tag{34}$$

$$= 2^n+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n+2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1} \tag{35}$$

Induktinossschluss Daraus folgt die Induktinosannahme. Die Behauptung $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n} = 2^n$ gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$.

3 Komplexe Zahlen

3.1 Re **und** Im Bestimmen Sie den Real- sowie Imaginärteil sowie Argument (Phase) der folgenden komplexen Zahlen:

a) $z_1 = \left(1+\frac{1}{3+4i}\right)^{-1}$

b) $z_2 = \frac{1}{R_1+i\omega L}+\frac{1}{R_2-i/(\omega C)}$

c) $z_3 = (1/\sqrt{5})\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}i\right)^{24}$

Lösung:

a) Wir beginnen mit Re und Im:

$$z_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{3+4\mathrm{i}}} = \frac{1}{1+(3-4\mathrm{i})/25} \tag{36}$$

$$= \frac{1}{(25+3-4\mathrm{i})/25} = \frac{25}{4(7-\mathrm{i})} = \frac{25(7+\mathrm{i})}{4(49+1)} \tag{37}$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{7}{8}+\frac{1}{8}\mathrm{i} \tag{38}$$

Das Argument lautet dann

$$\phi = \arctan\left(\frac{1/8}{7/8}\right) = \arctan(1/7) \tag{39}$$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\{z_1\} = 7/8, \mathrm{Im}\{z_1\} = 1/8, \phi(z_1) = \arctan(1/7)$

b) Wir beginnen wieder mit Re und Im:

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{1}{R_1 + \mathrm{i}\omega L} + \frac{1}{R_2 - \frac{\mathrm{i}}{\omega C}} && (40)\\
&= \frac{R_1 - i\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2 + \frac{i}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} && (41)\\
&= \frac{R_1(R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}) + R_2(R_1^2 + \omega^2 L^2) + \mathrm{i}\left(\frac{1}{\omega C}(R_1^2 + \omega^2 L^2) - \omega L(R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2})\right)}{(R_1^2 + \omega^2 L^2)(R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2})} && (42)
\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\mathrm{Re}\{z_2\} = \frac{R_1(R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}) + R_2(R_1^2 + \omega^2 L^2)}{(R_1^2 + \omega^2 L^2)(R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2})} \tag{43}$$

und

$$\mathrm{Im}\{z_2\} = \frac{\left(\frac{1}{\omega C}(R_1^2 + \omega^2 L^2) - \omega L(R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2})\right)}{(R_1^2 + \omega^2 L^2)(R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2})} \tag{44}$$

folglich gilt für das Argument

$$\phi(z_2) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\omega C}(R_1^2 + \omega^2 L^2 - \omega L(R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}{R_1(R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}) + R_2(R_1^2 + \omega^2 L^2)}\right) \tag{45}$$

c) Wir stellen auf Polarform um:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}i\right)^{24} &= re^i\phi && (46)\\
r &= \sqrt{2+6} = \sqrt{8} && (47)\\
\phi &= \arctan(6/2) = \arctan(3) = \pi/3 && (48)\\
\Rightarrow z_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\sqrt{2}e^{i\pi/3}\right)^{24} && (49)\\
z_2 &= \frac{(2\sqrt{2})^{24}}{\sqrt{5}}(\cos(8\pi) + \mathrm{i}\sin(8\pi)) && (50)
\end{aligned}$$

Damit bekommen wir $\mathrm{Re}\{z_2\} = \frac{(2\sqrt{2})^{24}}{\sqrt{5}}$, $\mathrm{Im}\{z_2\} = \phi(z_2) = 0$.

3.2 Einheitswurzel Geben Sie die (gesamte) Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an:

a) $z^5 = 1,\ z \in \mathbb{C}$

b) $z = \left(\frac{8}{2-2i}\right)^{3/2}$

c) $z = \sum_{k=1}^{2017} i^k$

d) $w = \sqrt{i}$

e) $(\sqrt{3}+i)^n + (\sqrt{3}-i)^n = 0$

Zusätzlich zu a: Betrachten Sie den Realteil der fünften Einheitswurzeln. Es gilt:

$$2\cos(2\pi/5) = -1/2 + \sqrt{5}/2 = -\phi_- \tag{51}$$
$$2\cos(4\pi/5) = -1/2 - \sqrt{5}/2 = -\phi_+ \tag{52}$$

wobei $\phi_\pm$ der goldene Schnitt ist. Freiwillige Zusatzaufgabe: Können Sie damit auch zeigen, dass das Verhältnis X/Y der Sehnenteile im goldenen Schnitt liegt? Es gilt $\phi_+ - 1 = 1/\phi_+$.

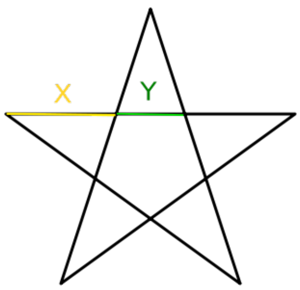

Abbildung 1: Verhältnis begrenzter Sehnenteile im Pentagramm.

Lösung:

a) Die Moivresche Formel besagt, dass für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$z^n = r^n (\cos\phi + i\sin\phi)^n = r^n (\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) \tag{53}$$

und somit gilt für die n-ten Wurzeln von z:

$$z_k = r^{1/n}\left(\cos(\phi/n + 2\pi k/n) + i\sin(\phi/n + 2\pi k/n)\right), \;\; k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{54}$$

Damit haben wir für $z^5 = 1$ ($\phi = 0, n = 5$):

$$w_5^k = z_k = 1 \cdot (\cos(2\pi k/5) + i\sin(2\pi k/5)), k = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{55}$$

Ausgeschrieben ergibt das die Lösungsmenge:

$$z \in \{\mathrm{Re}\{z\} = \cos(2\pi k/5),\;\; \mathrm{Im}\{z\} = \sin(2\pi k/5) \mid k = 0, 1, 2, 3, 4\} \tag{56}$$

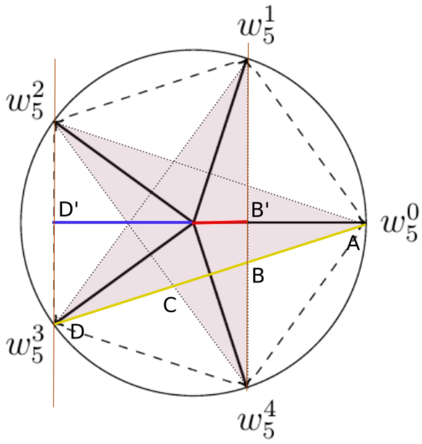

Abbildung 2: Visualisierung der 5. Einheitswurzeln. Die gestrichelten Linien ergeben ein Fünfeck. Die roten Flächen sind Teil eines Pentagramms. Die rote bzw. blaue Strecke sin die Realteile der Einheitswurzeln.

Wir betrachten die Imaginärteile dieser Lösungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{\cos(0) + i\sin(0)\} &= 1 & (57)\\ \mathrm{Re}\{\cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)\} = \mathrm{Re}\{\cos(8\pi/5) + i\sin(8\pi/5)\} &= \cos(2\pi/5) & (58)\\ \mathrm{Re}\{\cos(4\pi/5) + i\sin(2\pi/5)\} = \mathrm{Re}\{\cos(6\pi/5) + i\sin(6\pi/5)\} &= \cos(4\pi/5) & (59) \end{aligned}$$

Wir könnnen mithilfe des Hinweises sehen, dass die Realteile der fünften Einheitswurzeln genau den goldenen Schnitt $\phi_\pm$, jeweils geteilt durch -2, ergeben.
Freiwillige Zusatzaufgabe: Wir erkennen über den Strahlensatz, dass die Seitenverhältnisse im Pentagramm $\overline{AB} : \overline{BC}$ dem goldenen Schnitt entsprechen, denn:

$$\frac{\overline{B'D'}}{\overline{AB'}} = \frac{1/4 + \sqrt{5}/4 - 1/4 + \sqrt{5}/4}{1 - (-1/4 + \sqrt{5}/4)} = \frac{\sqrt{5}/2}{5/4 - \sqrt{5}/4} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC} + \overline{AB}}{\overline{AB}} = 1 + \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad (60)$$

Wir können direkt ausrechnen:

$$\frac{\sqrt{5}/2}{\sqrt{5}/2 \cdot (\sqrt{5}/2 - 1/2)} = \frac{1}{\sqrt{5}/2 - 1/2} = \frac{\sqrt{5}/2 + 1/2}{1} = \phi_+ = 1 + Y/X \quad (61)$$

Damit haben wir sofort

$$X/Y = 1/(\phi_+ - 1) = \phi_+ \quad (62)$$

mit $\phi_+ = \sqrt{5}/2 + 1/2$.

b) Für das zweite Wurzelziehen bestimmen wir durch Verwendung der 3. Binomischen Formel:

$$w := \frac{8}{2-2i} = \frac{4(1+i)}{1+1} = 2 + 2i \quad (63)$$

$$\Rightarrow r(w) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \phi(w) = \arctan 1 = \pi/4 \quad (64)$$

Somit haben wir wieder unter Zuhilfenahme der Moivreschen Formel

$$z = w^{3/2} = (2\sqrt{2})^{3/2} \cdot (\cos(3\pi/8) + i\sin(3\pi/8)) \quad (65)$$

Daraus folgt

$$\mathrm{Re}\{z\} = (2\sqrt{2})^{3/2}\cos(3\pi/8), \quad \mathrm{Im}\{z\} = (2\sqrt{2})^{3/2}\sin(3\pi/8), \quad \phi(z) = 3\pi/8 \quad (66)$$

c)

$$\sum_{k=1}^{2017} i^k = \sum_{k=1}^{2016} i^k + i^{2017} \tag{67}$$

Hierbei bemerken wir, dass

$$\sum_{k=1}^{4} i^k = i - 1 - i + 1 = 0 \tag{68}$$

und außerdem

$$\sum_{k=1}^{4n} i^k = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{69}$$

Deshalb gilt wegen $2016 \mod 4 = 0$

$$\sum_{k=1}^{2017} i^k = 0 + i^{2017} = i^{2016+1} = i^{2\cdot 1008} \cdot i = (-1)^{2\cdot 504} \cdot i = i \tag{70}$$

d)

$$\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})^2 = \mathrm{i} \tag{71}$$

also ist

$$w = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}) \tag{72}$$

Alternativ kann man die Formel für die Wurzel verwenden ($\varphi = \pi/2$):

$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}) \tag{73}$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}) \tag{74}$$

e) Die Aufgabe lässt sich am einfachsten durch die Polardarstellung lösen:

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \quad 1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \tag{75}$$

Daraus folgt:

$$(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \cdot 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{76}$$

Also muss gelten

$$\frac{n\pi}{4} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{77}$$

$$\Leftrightarrow n = 2(1 + 2k) \tag{78}$$

Unter der Bedingung, dass $n \in \mathbb{N}_0$ ist, erhalten wir das Ergebnis:

$$n = 2(1 + 2k), \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{79}$$

3.3 Mengen zeichnen Zeichnen Sie die folgenden Mengen und beurteilen Sie, ob diese offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt sind. Es gilt $z = x + iy = r\exp\{i\phi\}$. Hinweis: Die leere Menge ist definitionsgemäß kompakt.

- $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\{z\} \leq \lambda,\ \mathrm{Re}\{z\} = 1 + \lambda,\ -3 \leq \lambda \leq 6 \in \mathbb{R}\}$
- $B = \{z \in \mathbb{C} : r < \phi + 1,\ 0 \leq \phi \leq \pi, \phi \in \mathbb{R}\} \cap \{\mathrm{Im}\{z\} > 0\}$
- $C = A \cap B$

Lösung:

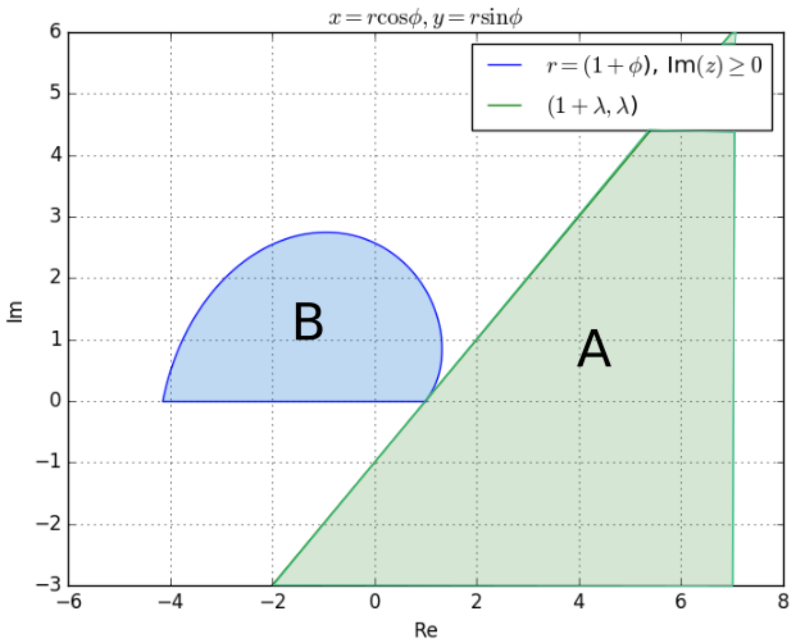

Abbildung 3: Die Mengen A und B schneiden sich nicht. Menge A geht für Im ≤ -3 „rechteckig"unendlich weit ins Negative. Somit ist die Schnittmenge die leere Menge.

Wir wiederholen die Definitionen von offen und beschränkt (Tafelanschrieb gegen Ende der Übung). Menge M offen bedeutet

$$\forall m_1 \in M \; \exists \epsilon > 0, m_2 \in \mathbb{R}^n \text{ sodass } |m_1 - m_2| < \epsilon \Rightarrow m_2 \in M \tag{80}$$

Anders ausgedrückt muss jede ϵ-Umgebung um einen Punkt der Menge M komplett in M liegen. M abgeschlossen bedeutet:

$$\forall m_1 \notin M \; \exists \epsilon > 0, m_2 \in \mathbb{R}^n \text{ sodass } |m_1 - m_2| < \epsilon \Rightarrow m_2 \notin M \tag{81}$$

Anders ausgedrückt muss jede ϵ-Umgebung um einen Punkt außerhalb der Menge M komplett außerhalb von M liegen. B ist offen, weil B ohne Rand ist. B ist nicht abgeschlossen, weil für den Punkt $z = 0 + 0\mathrm{i}$ keine ϵ-Umgebung exisitert, in der kein einziger Punkt von B liegt. Für A kann man einen Punkt auf der „schrägen Begrenzung" wählen, z.B. $z = 4+3\mathrm{i}$. Eine ϵ-Umgebung um diesen Punkt muss zwangsweise den Rand schneiden, weshalb A nicht offen ist. A ist aber abgeschlossen. Achtung: es kann auch Mengen geben, die weder offen noch abgeschlossen sind, oder auf die beides zutrifft! Die Schnittmenge

C ist die leere Menge und per Definition kompakt, und deshalb auch beschränkt und abgeschlossen. Sie ist aber auch offen! Denn es existiert kein „Punkt der leeren Menge", der die Bedingung verletzen würde. Sie ist daher wahr (vgl. Definition der Implikation).