Übungen zum Ferienkurs Analysis 1, Vorlesung 1
Wintersemester 2016/2017

1 Grundbegriffe

a) Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto \frac{1}{4}(1 - (-1)^n(2n+1)) \tag{1}$$

bijektiv?

b) Man bestimme die Umkehrfunktion, falls möglich:

$$f(x) : (-\infty, 0] \to (0, 1]+, \quad x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2+1}} \tag{2}$$

2 Vollständige Induktion

2.1 Summe von Kubikzahlen Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für die Summe der Dreierpotenzen folgende Relation gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{3}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Ungleichungen (Teil 1) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass stets für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(3n)! > 2^{6n-4} \tag{4}$$

2.2 Ungleichungen (Teil 2) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass stets für alle $n > 3$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt:

$$2^n < n! \tag{5}$$

2.3 Bonbon-Spiel (*) Bibi und Tina spielen das Bonbon-Spiel, bei dem die folgenden Regeln gelten: Zu Beginn des Spiels befindet sich eine mit n Bonbons gefüllte Schale auf dem Tisch, aus der Bibi und Tina abwechselnd jeweils nach Wahl ein, zwei oder drei Bonbons herausnehmen. Diejenige, die am Ende kein Bonbon mehr herausnehmen kann wenn sie am Zug ist, weil die Schale bereits leer ist, hat verloren. Bibi beginnt das Spiel und zieht als erste. Beweisen Sie, dass sie für $n \mod 4 \neq 0$ (n nicht durch 4 teilbar oder null) immer gewinnt. Für $n \mod 4 = 0$ verliert sie. Dabei ist n die Zahl der Bonbons jeweils nach einem Zug. Man sagt dann, Bibi hat eine „Gewinnstrategie ", kann also einen Gewinn erzwingen. Hinweis: Verwenden Sie für den Beweis die vollständige Induktion.

2.4 Binomialkoeffizient Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass stets für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \tag{6}$$

Hinweis: Sie könenn ohne Beweis verwenden, dass $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

3 Komplexe Zahlen

3.1 Re **und** Im Bestimmen Sie den Real- sowie Imaginärteil sowie Argument (Phase) der folgenden komplexen Zahlen:

a) $z_1 = \left(1 + \dfrac{1}{3+4i}\right)^{-1}$

b) $z_2 = \dfrac{1}{R_1 + i\omega L} + \dfrac{1}{R_2 - i/(\omega C)}$

c) $z_3 = (1/\sqrt{5}) \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}i\right)^{24}$

3.2 Gleichungen Geben Sie die (gesamte) Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an:

a) $z^5 = 1, \; z \in \mathbb{C}$

b) $z = \left(\dfrac{8}{2-2i}\right)^{3/2}$

c) $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{2017} i^k$

d) $w = \sqrt{i}$

e) $(\sqrt{3}+i)^n + (\sqrt{3}-i)^n = 0$

Zusätzlich zu a: Betrachten Sie den Realteil der fünften Einheitswurzeln. Es gilt:

$$2\cos(2\pi/5) = -1/2 + \sqrt{5}/2 = -\phi_- \tag{7}$$

$$2\cos(4\pi/5) = -1/2 - \sqrt{5}/2 = -\phi_+ \tag{8}$$

wobei $\phi_\pm$ der goldene Schnitt ist. Freiwillige Zusatzaufgabe: Können Sie damit auch zeigen, dass das Verhältnis X/Y der Sehnenteile im goldenen Schnitt liegt? Es gilt $\phi_+ - 1 = 1/\phi_+$.

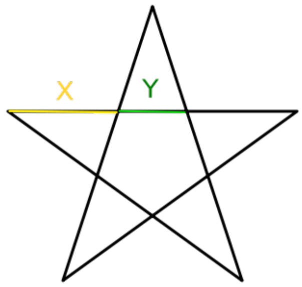

Abbildung 1: Verhältnis begrenzter Sehnenteile im Pentagramm.

3.3 Mengen zeichnen Zeichnen Sie die folgenden Mengen und beurteilen Sie, ob diese offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt sind. Es gilt $z = x + iy = r\exp\{i\phi\}$. Hinweis: Die leere Menge ist definitionsgemäß kompakt.

- $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\{z\} \leq \lambda,\ \ \mathrm{Re}\{z\} = 1 + \lambda,\ \ -3 \leq \lambda \leq 6 \in \mathbb{R}\}$
- $B = \{z \in \mathbb{C} : r < \phi + 1,\ 0 \leq \phi \leq \pi, \phi \in \mathbb{R}\} \cap \{\mathrm{Im}\{z\} > 0\}$
- $C = A \cap B$