Skript

Ferienkurs Analysis 1

Fabian Hafner und Thomas Baldauf
TUM Wintersemester 2016/17

03.04.2017

Das Skript wurde teilweise übernommen vom Skript des Ferienkurses WS 2014, verfasst von Andreas Wörfel. Fragen können bis zum Abend vor der nächsten Vorlesung an fabian.hafner@tum.de geschickt werden, damit sie intensiver in der Vorlesung behandelt werden können.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

1.1 Mengen

'Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.' (naive Mengenlehre nach Georg Cantor)

Für die 'normalen' Anwendungsgebiete reicht diese Definition völlig aus, bei genauer Untersuchung stellt man jedoch Widersprüche fest, die erst durch die Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel (ZFC) beseitigt werden.

Beispiel: Widerspruch der naiven Mengenlehre

Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Mengen $\mathcal{A}$ die sich selbst nicht als Element enthalten, also $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}$. Nun kann man sich fragen: Ist $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$? Falls ja, so muss $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$ gelten, falls nein, muss $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$ gelten, da $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$ gilt. In jedem Fall kommt man also auf einen Widerspruch.

Die wichtigsten Mengenoperationen sind unten angeführt. Sie sind insofern wichtig, da man durch Mengen und Relationen ein Fundament der Mathematik hat, aus dem man alles weitere herleiten kann (theoretisch).

Definition: Verschiedene Operationen

Sei X eine Menge und A, A_i, $B \subset X$, $i = 1, 2, ..., n$. Dann definieren wir:

- **Vereinigung**: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
  oder für n Mengen: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x | x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$
- **Schnitt**: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
  oder für n Mengen: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x | x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$
- **Differenz**: $A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Komplement**: $A^c = \{x | x \in X \wedge x \notin A\}$
- **Karthesisches Produkt**: $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$
  (erweiterbar auf bel. viele Dimensionen)
- **Potenzmenge**: $\mathcal{P}(A) = \{M | M \subset A\}$ (Menge aller Teilmengen)

1.2 Abbildungen

Definition: Abbildung, Definition- und Wertebereich

Seien M, N Mengen. Eine **Abbildung** f ordnet jedem Element m aus M *eindeutig* ein Element $n = f(m)$ aus N zu. Man schreibt: $f : M \to N, m \mapsto n = f(m)$ oder kurz: $f : M \to N, n = f(m)$

M heißt **Definitionsbereich**, N heißt **Wertebereich** der Funktion.

Definition: Bild, Urbild, Graph, Einschränkung

Es seien die Voraussetzungen wie oben. $f(m) = n$ heißt das **Bild von** m, $f^{-1}(n) = \{x | x \in M \wedge f(x) = n \in N\}$ heißt das **Urbild von** n. Wir nennen $f(M)$ das **Bild von** f oder **Bild von** M **unter** f und $f^{-1}(N)$ das **Urbild von** N **unter** f.

Die Menge $\mathcal{G} = \{(m, f(m)) | m \in M\}$ heißt der **Graph von** f.

Die Abbildung $f|_K : K \to N, k \mapsto f(k)$ mit $K \subset M$ heißt **Einschränkung von** f **auf K**.

Definition: Injektiv, surjektiv, bijektiv, Umkehrfunktion, Menge der Abbildungen

Es seien die Voraussetzungen wie oben. Wir nennen eine Funktion

- **injektiv**, wenn alle $m \in M$ höchstens ein Bild $n \in N$ haben. Nicht alle Elemente aus N müssen ein Urbild haben. Also: $\forall m_1, m_2 \in M : (f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2)$
- **surjektiv**, wenn alle $n \in N$ mindestens ein Urbild haben. Ein $n \in N$ darf mehrere Urbilder haben. Also: $f(M) = N$
- **bijektiv**, wenn die Abbildung injektiv und surjektiv zugleich ist. Jedes $m \in M$ wird genau einem $n \in N$ zugeordnet.

Für eine bijektive Abbildung können wir die **Umkehrfunktion** $f^{-1} : N \to M, f^{-1}(n) = m$ definieren, die zu jedem Bild $f(m) = n$ das eindeutige Urbild wiedergibt.

Beispiel: Anwendung der Definitionen

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$. Dann ist

- $f(2) = 2$ das Bild von $2 \in \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ das Bild von f
- $f^{-1}(2) = \{2, -2\}$ das Urbild von $2 \in \mathbb{R}^+$ unter f
- $f^{-1}(-4) = \{\} \subset \mathbb{R}$, da -4 zwar im Wertebereich von f ist, aber nicht im Bild. Daher ist das Urbild die leere Menge.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$ ist demnach weder surjektiv noch injektiv
- die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = |x|$ bijektiv.

Definition: Monotonie

Eine Funktion $f : M \to N$ für geordnete Mengen $(M, >)$, $(N, >)$ heißt **monoton wachsend**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $y \geq x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

Gilt nur „>“ statt „≥“, so heißt die Funktion **streng monoton wachsend**. Analog definiert man **(streng) monoton fallend**. Monotone Funktionen sind automatisch injektiv.

Anmerkung: Früher wurde erwähnt, dass aus Mengenlehre weitere Gebiete der Mathematik hergeleitet werden können. Man z.B. die Monotonie der Abbildung $f(n) = n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ so zeigen: Man ordne der 0 die leere Menge $\{\}$ zu, der 1 die Menge die alle Mengen davor einschließt, also $\{\{\}\}$, dann für die 2 $\{\{\}, \{\{\}\}\}$ oder allgemein $M_{n+1} = \cup_{i=0}^{n} M_i$. Dann gilt $a \leq b \Leftrightarrow M_a \subseteq M_b$

2 Gruppen und Körper

Gruppen und deren Eigenschaften spielen in der Physik eine große Rolle, daher sollte man wissen, was eine Gruppe ausmacht. Zum Beispiel kann die Quantenmechanik und teilweise die Teilchenphysik mit Gruppen elegant formuliert werden.

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar aus einer Menge und einer Verknüpfung $(G, \otimes)$. Dabei gilt für die Verknüpfung: $\otimes : G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \otimes g_2 = g$.

Es muss erfüllt sein (Gruppenaxiome):

- **Assoziativität**: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G : (g_1 \otimes g_2) \otimes g_3 = g_1 \otimes (g_2 \otimes g_3)$
- **neutrales Element**: $\exists e \in G \; \forall g \in G : g \otimes e = g$
- **inverses Element**: $\forall g \in G \; \exists g^{-1} : g \otimes g^{-1} = e$

Eine Gruppe heißt **abelsch** oder **kommutativ**, wenn $\forall g_1, g_2 \in G : g_1 \otimes g_2 = g_2 \otimes g_1$.

Satz: Neutrales Element, inverses Element

In einer Gruppe ist das neutrale Element eindeutig, es ist links- und rechtsneutral. Ebenso ist inverse Element eindeutig sowie rechts- und linksinvers.

Definition: Körper

Ein Körper ist ein Tripel aus einer Menge und zwei Verknüpfungen $(K, \oplus, \odot)$, wobei
$\oplus : K \times K \to K, (k_1, k_2) \mapsto k_1 \oplus k_2 = k$ und $\odot : K \times K \to K, (k_1, k_2) \mapsto k_1 \odot k_2 = k$.
Wir bezeichnen mit 0 das neutrale Element bzgl. $\oplus$ und mit 1 das neutrale Element bzgl. $\odot$.
Es muss gelten:

- $(K, \oplus)$ und $(K \backslash \{0\}, \odot)$ sind abelsche Gruppen
- **Distributivgesetz**: $(k_1 \oplus k_2) \odot k_3 = (k_1 \odot k_3) \oplus (k_2 \odot k_3)$

3 Beweise

Einen Beweis zu führen ist Grundlage jeder mathematischen Ausbildung. Es gibt sehr viele Arten von Beweisen. Die wichtigsten seien hier kurz vorgestellt und erläutert. Denn je nach Fall bietet sich der ein oder andere Typ von Beweis mehr oder weniger an.

3.1 Implikationsbeweise: $A \Rightarrow B$

Implikationen, also $A \Rightarrow B$ lassen sich entweder direkt (also, dass A immer B zur Folge hat) oder indirekt ($\neg B \Rightarrow \neg A$). Die Beweise folgen stets aus Axiomen.

Auch für die **Alleinstehende Aussage** A gibt es zwei wesentliche Möglichkeiten: Umformung + Definitionen und Widerspruch.

- Umformung + Definitionen: Hier machen wir uns das axiomatische und definitorische Grundgerüst der Mathematik zu nutze. Wir wenden das, was wir uns festgelegt oder schon bewiesen haben, auf die Aussage an, um dann eine wahre Aussage zu erhalten. *Beispiel:* $(\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}, \oplus_{mod})$ *bildet eine Gruppe.*

- Widerspruch: Wir negieren unsere Aussage und erhalten dann, durch Umformung einen Widerspruch zu gemachten Voraussetzungen, die wir aus der Negierung der Aussage herleiten. *Beispiel:* $\sqrt{2}$ *ist irrational.* $\rightarrow$ *Nehme an,* $\sqrt{2}$ *sei rational.*

3.2 Induktionsbeweis

Typischerweise finden Induktionsbeweise dann Anwendung, wenn eine Aussage für beliebige $n \in \mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ bewiesen werden soll. Dies kann in Form von Gleichungen, Ungleichungen oder allgemeinen Aussagen (z.B. n Geraden zerschneiden ein Gebiet in höchstens x Gebiete) geschehen. Die Beweisführung ist dabei **immer** dieselbe und muss sauber dokumentiert werden:

- **Induktionsanfang**: Man zeigt zunächst, dass die Aussage für ein bestimmtes $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt. Zweckmäßig sind hierfür meistens die kleinsten zugelassenen n_0.

- **Induktionsvoraussetzung**: Setze dann voraus, die Aussage gelte bereits für alle n. Oft wird dieser Schritt nicht erwähnt, jedoch sollte man sich im klaren darüber sein, was vorausgesetzt wird. Allein die Voraussetzung darf im nächsten Schrittt zur Beweisführung verwendet werden.

- **Induktionsschritt**: Gehe über von n zu $n + 1$ und zeige, dass die Aussage dann immer noch gilt. Prinzipiell gibt es 2 Möglichkeiten, da meist eine Gleichheit von 2 Ausdrücken zu zeigen ist: Links oder rechts $n+1$ einsetzen. Meist ist eine Variante leichter zu rechnen. Faustregel: man setzt in die komplizierter aussehende Seite ein.

4 Komplexe Zahlen

4.1 Definition und Grundlagen

Die komplexen Zahlen stellen ein wichtiges Hilfsmittel in unzähligen Gebieten der Physik dar. Sie lassen sich allgemein einführen durch die imaginäre Einheit

$$\sqrt{-1} =: \mathrm{i}$$

und stellen mit der komponentenweisen Addition, Multiplikation, Division

$$(a+\mathrm{i}b)\cdot(c+\mathrm{i}d) = (ac-bd)+\mathrm{i}(bc+ad), \qquad \frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} = \frac{(ac+bd)+\mathrm{i}(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

sowie der Multiplikation mit Skalaren den Körper $\mathbb{C}$ dar. Man kann komplexe Zahlen mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren durch $(a,b) = a+ib$ und es gelten die schon erwähnten Rechenregeln in Körpern. Zu einer komplexen Zahl $z = a+ib$ definiert man den Realteil als $\mathrm{Re}(z) := a$ und analog den Imaginärteil als $\mathrm{Im}(z) := b$. Die **komplex Konjugierte** zu z ist $\bar{z} = a - ib$.

In $\mathbb{C}$ lässt sich ein wichtiger Satz der Mathematik formulieren:

Fundamentalsatz der Algebra:

Sei $z \in \mathbb{C}$. Jedes komplexe Polynom $p_n(z)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle, d.d. ist eine Lösung von $p(z) = 0$

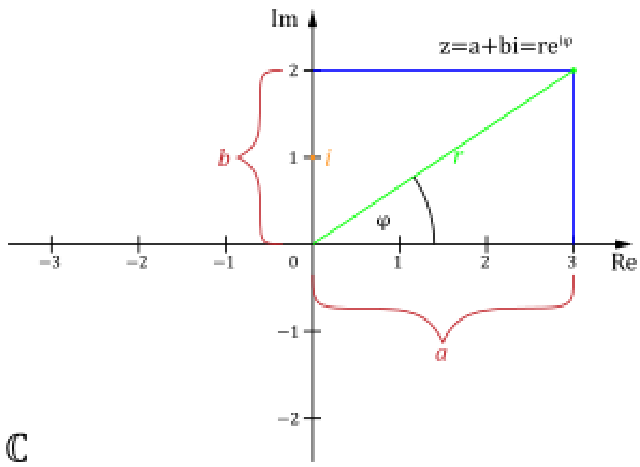
Grundlagen

- $|z|^2 = z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$, $\quad |z|$ heißt der **Betrag** von z
- $\overline{(z+w)} = \bar{z}+\bar{w}$, $\quad \overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w}$, $\quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$
- $|zw| = |z||w|$, $\quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

4.2 Polardarstellung

Für Operationen wie Wurzelziehen und Potenzieren ist die obige Darstellung umständlich. Man kann den Körper $\mathbb{C}$ als komplexe Zahlenebene betrachten und mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren, wobei der Imaginärteil die y-Achse und der Realteil die x-Achse sein sollen und mit den Parametern $r = |a + \mathrm{i}b|$ und $\varphi = \arg(a, b) = \operatorname{atan2}(a, b) \in (-\pi, \pi]$ (!) wobei

$$\operatorname{atan2}(a, b) = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & a > 0 \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & b \geq 0, a < 0 \\ \arctan \frac{b}{a} - \pi & b < 0, a < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & b > 0, a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & b < 0, a = 0 \\ \text{nicht definiert} & b = 0, a = 0 \end{cases}$$



Meistens ist es aber einfacher den Tangens zu bilden und das Argument in einem Winkelbereich zwischen π und $-\pi$ zu bringen. Eine komplexe Zahl kann so allgemein geschrieben werden als

$$z = |z|(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

Daraus ergeben sich auch sofort die oft sehr hilfreichen Darstellungen der trigonometrischen Funktionen:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi})$$

Mit diesen Regeln wird aus Potenzieren und Wurzelziehen einfach Multiplizieren und Dividieren im Nenner. Beim Wurzelziehen muss man jedoch auf mehrfache Lösungen aufpassen, denn

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi + 2\pi k)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Man kann damit allgemeine Formeln für das Wurzelziehen finden. Man sucht also zur n-ten Wurzel der Zahl z eine Zahl w, für die gelten soll $w^n = z$. Mit den schon bekannten Formeln und der Periodizität ergibt sich:

Satz von Moivre:

$$w = \sqrt[n]{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Man sieht also, dass die Lösungen eine Symmetrie aufweisen, sie haben alle denselben Betrag (befinden sich also auf einem Kreis mir Radius $|z|$) und sind um den Winkel $2\pi/n$ verschoben. Sie bilden also ein regelmäßigen n-Eck. Man kann diese Symmetrie oft ausnutzen und nur eine oder zwei Lösungen berechnen und des Rest ohne Rechnung bestimmen.

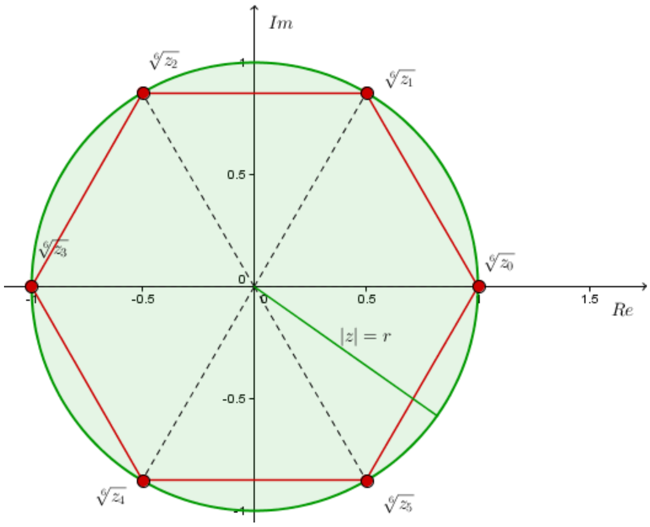


Abbildung 1: Exemplarische Darstellung für $\sqrt[6]{z_0}$.

Die Definition der komplexen Exponentialfunktion legt es nahe, deren Umkehrfunktion, den komplexen Logarithmus, zu definieren:

$$\ln(z) = \ln\left(|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi k)}\right) = \ln|z| + \mathrm{i}(\varphi + 2\pi k)$$

Der Logarithmus zeigt also ein Uneindeutigkeit durch die beliebige Addition von $2\pi k$ und ist deshalb in dieser Form keine wohldefinierte Funktion auf $\mathbb{C}$. Man kann hier aber einfach den sogenannten **Hauptzweig** vom Logarithmus wählen, sodass eine Logarithmus-Funktion

$$\ln z = \ln |z| + \mathrm{i}\varphi$$

ist.

5 Ordnungsstruktur auf $\mathbb{R}$

Definition: Ordnungsaxiome ($P \subset \mathbb{K}$)

(P1) **Trichotomie:** Ein Körper $\mathbb{K}$ lässt sich disjunkt zerlegen in $P, \{0\}, -P$

(P2) **Transitivität:** $\forall x, y \in \mathbb{K}: \ x > 0 \wedge y > 0 \ \Rightarrow \ x + y > 0 \wedge x \cdot y > 0$

Ein Körper $(K, \oplus, \odot)$ heißt **angeordnet**, falls es eine (positive) Teilmenge P gibt, so dass P1 und P2 gelten.

Satz: In einen geordneten Körper gilt

(1) **Transitivität:** $x < y \wedge y < z \ \Rightarrow \ x < z$

(2) **Spiegelung:** $x < y \ \Rightarrow \ -x > -y$

(3) **Inversion:** $0 < x < y \ \Rightarrow \ 0 < y^{-1} < x^{-1}$

(4) **Addition:** $x < y \wedge w < z \ \Rightarrow \ x + w < y + z$

(5) **Positivität des Quadrats:** $x \neq 0 \ \Rightarrow \ x^2 > 0$

Die Eigenschaften eines angeordneten Körpers sind wichtig, da man z.B. erst so Supremum (sup(P) kleinste obere Schranke und Infimum (inf(P) größte untere Schranke) sinnvoll definieren kann.