Lösungen Probeklausur 31.03.2017

Kurze Fragen:

(a) Eine Gruppe ist ein Tupel $(G, *)$ aus Menge G und Verknüpfung $*: G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto a*b$ wenn gilt

- Assoziativität $a*(b*c) = (a*b)*c$
- $\exists$ neutrales Element e sodass $\forall a \in G: a*e = e*a = a$
- $\forall a \in G$ $\exists$ inverses $a^{-1} \in G$ mit $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

Eine Gruppe ist abelsch, wenn $a*b = b*a$ $\forall a,b \in G$ gilt.

(b) Schreibe Vektoren in Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Vektoren sind l.u. und bilden Basis des $\mathbb{R}^4$

c) $\det M = 42$

e) $F \in \mathrm{End}(V) \Rightarrow F$ bildet von V nach V ab.

$\ker(F) := \{v \in V \mid F(v) = 0\}$; $\mathrm{Bild}(V) := \{w \in V \mid \exists v \in V: F(v) = w\}$

f) A ist invertierbar ; B ebenfalls ; C nicht, da Zeilen linear abh. ; D ist invertierbar

g) Da $x^2 = x \cdot x \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ folgt, dass $K = \{\vec{0}\}$ nur den Nullvektor enthält. So sind die UVR-Kriterien trivial erfüllt.

Aufg 1)

e_G' ist neutr. Elem.

(a) $e_G \overset{!}{=} e_G' * e_G \underset{|}{=} e_G'$ □

e_G ist neutr. El.

(b) e_G ist nE   f ist Gruppenhom.

$f(e_G) \overset{!}{=} f(e_G * e_G) \overset{!}{=} f(e_G) \circ f(e_G)$

$\circ\,(f(e_G))^{-1}$

$\Longrightarrow e_H = f(e_G)$ □

(c) $e_H \underset{|}{=} f(e_G) \underset{|}{=} f(a^{-1} * a) \underset{|}{=} f(a^{-1}) \circ f(a)$

b)   ∃ inverses Element   f Gruphom

$\Longrightarrow (f(a))^{-1} = f(a^{-1})$ □

$\circ\,(f(a))^{-1}$

d) $a \Delta b \underset{|}{=} (a \Delta b)^{-1} \underset{|}{=} b^{-1} \Delta a^{-1} \underset{|}{=} b \Delta a$ □

$a^2 = e\ \forall a \in P$ siehe VL $a^2 = a\ \forall a \in P$

Aufg 2) Ansatz $\forall v \in U \cap W$ gilt

$$v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

umstellen bringt das homogene LGS

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 2\mu_1 = \mu_2 \quad \forall v \in V$$

$$\Rightarrow v \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Aufg 3) Seien $p, q \in \mathbb{R}[x]_3$

a) $\varphi(p+\lambda q) = p(a) + \lambda q(a) + (p+\lambda q)'(a)(x-a)$

$= p(a) + \lambda q(a) + (p'(a) + \lambda q'(a))(x-a)$

$= p(a) + p'(a)(x-a) + \lambda(q(a) + q'(a)(x-a))$

$= \varphi(p) + \lambda\varphi(q) \Rightarrow \varphi$ ist linear.

b) $\varphi(1) = 1$

$\left.\begin{array}{l}\varphi(x) = a + 1\cdot(x-a) = x\end{array}\right\} \Rightarrow 1, x$ sind Eigenvektoren zum EV 1

$\varphi(x^2) = a^2 + 2a(x-a) = a^2 - 2a^2 + 2ax = 2ax - a^2$

$\varphi(x^3) = a^3 + 3a^2(x-a) = a^3 + 3a^2x - 3a^3 = -2a^3 + 3a^2x$

$$\Rightarrow \Phi_E^E(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 & -2a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ist Darstellungsmatrix

c) Finde Eigenvektoren

$$\chi_1 = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -a^2 & -2a^3 \\ 0 & 1-\lambda & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2a & 3a^2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$+(-a^2)\cancel{\det\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & 3a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}} = 0 \qquad +(-2a^3)\cancel{\det\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & 2a \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = 0$$

$$= (1-\lambda)\cdot(-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2a \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)$$

$= (1-\lambda)^2(-\lambda)^2 \Rightarrow$ EW sind $\lambda_1 = 1$ (siehe oben) und $\lambda_2 = 0$. Für EV berechne also

$$\ker\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 0 & -a^2 & -2a^3 \\ 0 & 1-\lambda_2 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^2 & -2a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ker 2 Dimensional mit x_3, x_4 freien Parameter

$x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = -3a^2 \quad x_1 = 2a^3$

$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -2a \quad x_1 = a^2$

$\Rightarrow$ geordnete Basis $B = (1, x, x^2 - 2ax + a^2, x^3 - 3a^2x + 2a^3)$

Aufgabe 4/

zu A)

Charakteristisches Polynom

$$\chi_A = \det(A - \lambda E_3) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda = (\lambda+3)(\lambda-2)\lambda$$

$\Rightarrow$ EW $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$ $\Rightarrow$ alle alg. und daher auch geo Vielfachheiten sind 1.

$\Rightarrow$ A ist Diagonalisierbar, es gilt $alg(\lambda_i) = geo(\lambda_i)$ $\forall i \in \{1,2,3\}$

Finde Eigenvektoren als Lösung von

$$(A - \lambda_i E_3) = 0$$

Es ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -20 \\ 19 \end{pmatrix}$ und $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist Basis aus Eigenvektoren.

Zu B) Berechnungen analog zu A.

$$\chi_B = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = (\lambda-3)(\lambda-1)\lambda \Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0$$

und B ist diagonalisierbar

Mit Eigenvektoren $v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $\{v_1', v_2', v_3'\}$ Basis aus Eigenvektoren.

c)

- Die Determinante beider ~~...~~ Matrizen wie auch das jeweilige Produkt der Eigenwerte ist null, da die Determinante gerade das Produkt der Eigenwerte ist.

Aufgabe 5)

Wir machen den Ansatz $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

und schreiben die Gleichungen in ein LGS

$$\left(\begin{array}{cccc} -8a & 4b & -2c & d \; -3 \\ -a & b & -c & d \; -1 \\ 0 & 0 & 0 & d \; -1 \\ a & b & c & d \; 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc} a & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & b & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & c & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & d & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow p(x) = 3x^3 + 2x^2 - x - 1$

Aufgabe 6)

a) Nein, da mit EW $\lambda_i = 0$ von Matrix A $\det = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow$ A nicht invertierbar

b) Ja

c) Nein, da das komplex konjugierte einer NST des charakteristische Polynoms immer auch NST $\in \mathbb{C}$ ist $\Rightarrow$ komplexe NST (= EW) treten paarweise auf.

d) Ja, für $\lambda \neq 0$ stimmen algebraische und geometrische Vielfachheiten der EW. nicht überein.

e) Nein. Gegenbsp. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = 1 \\ 1 & \text{wenn } x = 0 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$

f) Ja, die Menge ist ein UVR

g) Nein, sie ist das Produkt dessen