Ferienkurs Mathematik für Physiker I
Probeklausur
31.3.2017

Kurze Fragen

Beantworten bzw. lösen Sie die folgenden kurzen Fragen und Aufgaben:

(a) Was ist eine Gruppe? Wann wir eine Gruppe „abelsch" genannt?

(b) Überprüfen Sie, ob die vier Vektoren $b_1 = (0, 3 - 2, 4)$, $b_2 = (1, 0, 2, 6)$, $b_3 = (1, 1, -1, 1)$, und $b_4 = (4, 5, -2, 2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

(c) Es sei $V = K_{\mathbb{R}}[x]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen Polynome. Überprüfen Sie, ob die Abbildung

$$F : V \to V, f \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$$

einen Endomorphismus definiert.

(d) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(e) Es sei V ein Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Was ist die Definition der Mengen $\mathrm{Bild}(F)$ und $\mathrm{Kern}(F)$?

(f) Sind die folgenden Matrizen invertierbar? Eine Begründung ist nicht notwendig.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -7 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(g) Es sei $\mathbb{R}^3$ der dreidimensionale Vektorraum über den reellen zahlen. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $K := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right\} \subset \mathbb{R}^3$ einen Untervektorraum bildet.

Aufgabe 1: Gruppen

Seien $(H, \circ)$ und $(G, *)$ Gruppen und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Weiter seien e_G, e'_G neutrale Elemente in $(G, *)$ und e_H jenes in $(H, \circ)$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $e_G = e'_G$,

(b) $f(e_G) = e_H$,

(c) $\forall a \in G : f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.

(d) Sei nun $(P, \triangle)$ eine weitere Gruppe in der gelte $\forall\ a \in (P, \triangle) : a^2 = e_p$ mit e_p dem neutralen Element. Zeigen Sie, dass $(P, \triangle)$ kommutativ ist.

Aufgabe 2: Schnitt von Untervektorräumen

Bestimmen Sie den Schnitt der beiden Untervektorräume

$$U := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right), \quad W := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

des $\mathbb{R}^3$ und geben Sie eine Basis an.

Hinweis: Der Schnitt der Vektorräume ist die Menge aller Vektoren die als Linearkombination der Basisvektoren von U und V dargestellt werden kann.

Aufgabe 3: Darstellungsmatrizen

Im Vektorraum $\mathbb{R}[x]_3$ der Polynome $p(x)$ vom Grad deg ≤ 3 ist für ein $a \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ durch

$$\varphi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}(a) + \mathbf{p}'(a)(x - a)$$

erklärt.

(a) Zeigen Sie die Linearität von φ.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von φ bezüglich der geordneten Basis $E := (1, x, x^2, x^3)$ von $\mathbb{R}[x]_3$.

(c) Bestimmen Sie eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}[x]_3$ bezüglich der die Darstellungsmatrix von φ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 4: Eigenwerte von Matrizen

Wir betrachten die Matrizen :

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\-4 & 0 & 4\\5 & 1 & -3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

(a) Finden Sie die Eigenwerte der beiden Matrizen und bestimmen Sie für jeden der Eigenwerte die algebraische Vielfachheit.

(b) Die Matrizen A und B sind diagonalisierbar. Finden Sie jeweils eine Basis aus Eigenvektoren.

(c) Bestimmen Sie für beide Matrizen jeweils die Determinante und das Produkt der Eigenwerte. Was fällt ihnen auf?

Aufgabe 5: Polynominterpolation

Gegeben ist die folgende Tabelle an Messwertepaaren:

x	-2	-1	0	1
$p(x)$	-3	-1	-1	3

Bestimmen Sie ein Polynom vom Grad 3, das diese Messwerte annimmt.

Aufgabe 6: Wahr oder Falsch

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Sie brauchen keine Beweise zu führen.

(a) Es gibt eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit dem Eigenwert 0.

(b) Der Nullvektor ist immer linear Abhängig.

(c) Es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die keine Reellen und genau einen komplexen Eigenwert hat.

(d) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist nur für $\lambda \neq 0$ nicht diagonalisierbar.

(e) Eine bijektive Abbildung ist immer linear.

(f) Die Menge $V := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | \text{nur für endlich viele } x \in \mathbb{R} \text{ gilt} f(x) \neq 0\} \subsetneq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum.

(g) Die Determinante ist die Summe der Eigenwerte.