Ferienkurs Mathematik für Physiker I
Musterlösungen zu Blatt 4
30.3.2017

Aufgabe 1: Endomorphismen über allgemeinen Vektorräumen

Der $\mathbb{R}^n$ ist ein klassischer Vektorraum. Das Konzept des Vektorraums ist jedoch deutlich allgemeiner. Hier betrachten wir zum Beispiel den $\mathbb{R}$-Vektorraum $K_3[x]$ der reellwertigen Polynome mit Grad kleiner 3, definiert als

$$K_3[x] := \{f \in K_R[x] \,|\deg(f) < 3\} \tag{1}$$

mit

$$K_R[x] := \{f \in K[x] \,| f(x) \in \mathbb{R} \,\forall x \in \mathbb{R}\}. \tag{2}$$

(a) Finden Sie die Matrixdarstellung der folgenden Endomorphismen in der Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_i(x) = x^{i-1}$.

(i) $F : K_3[x] \to K_3[x], f \to f \circ g$ mit $g(x) = 3x$.

(ii) $F : K_3[x] \to K_3[x], f \to f'$

(iii) $F : K_3[x] \to K_3[x], f \to c_1 g_1 + c_2 g_2$
mit $g_1, g_2 \in V$ definiert als $g_1(x) = 5x^2 - 3$ und $g_2(x) = 3x + 4$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ definiert als $c_1 = f(x = 1)$ und $c_2 = f(x = 0)$.

Lösung :

(i)

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Was ist jeweils der Rang der drei betrachteten Endomorphismen aus (a) ? Bestimmen Sie jeweils den Kern der Abbildungen!

Lösung :

(i) Die Matrix hat vollen Rang, und damit ist der Kern $K = \{0\}$.

(ii) Die Matrix hat Rang 2, und der Kern ist $K = K_1[x] := \{f \in K_R[x] \,|\deg(f) < 1\}$.

(iii) Die Matrix hat Rang 2, und der Kern ist $K = \{f \in K_R[x] \,| f(0) = f(1) = 0\}$.

Aufgabe 2: Diagonalisieren von Matrizen

Wir betrachten folgende Matrizen :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Finden Sie die Eigenwerte der Matrizen bestimmen Sie für jeden Eigenwert die geometrische und algebraische Vielfachheit.

Lösung :

(i) Die Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, und $\lambda_3 = 6$. Die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten sind jeweils 1.

(ii) Die Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$. Die algebraische Vielfachheit von λ_1 ist 2 und die algebraische Vielfachheit von λ_2 ist 1. Die geometrischen Vielfachheiten sind jeweils gleich der algebraischen Vielfachheiten.

(iii) Die Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 3$. Die geometrischen Vielfachheiten und die algebraische Vielfachheit von λ_1 sind jeweils 1, aber die algebraische Vielfachheit von λ_2 ist 2.

(b) Welche Bedingung muss eine Matrix erfüllen, um diagonalisierbar zu sein? Erfüllen die gegebenen Matrizen diese Bedingung?

Hinweis: Die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sind relevant.

Lösung : Die Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte muss gleich der Dimension des zugrundeliegenden Vektorraumes sein. Nur die Matrix A erfüllt diese Bedingung in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(c) Die Matrizen A und B sind diagonalisierbar. Geben Sie jeweils eine Basis aus Eigenvektoren an!

Lösung :

Eine Basis aus Eigenvektoren für A ist z.B. $b_1 = (-2, 0, 3)$, $b_2 = (1, -24, 9)$, und $b_3 = (1, 0, 1)$.

Eine Basis aus Eigenvektoren für B ist z.B. $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, -1, 1)$, und $b_3 = (7, -6, 4)$.

Aufgabe 3: Skalarprodukte

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix. Wir betrachten eine zweistellige Abbildung $F_A : V \times V \to K, x \to x^T Ax$ von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V in den zugrundeliegenden Körper $\mathbb{K}$.

(a) Welche Eigenschaften muss eine zweistellige Abbildung im allgemeinen erfüllen damit sie ein Skalarprodukt definiert?

Lösung :

(i) Bilinearität, d.h. $F_A(x_1 + ax_2, y_1 + by_2) = F_A(x_1, y_1) + aF_A(x_2, y_1) + bF_A(x_1, y_2) + abF_A(x_2, y_2)$

(ii) Symmetrie, d.h. $F_A(x, y) = F_A(y, x)$

(iii) Positive Definitheit, d.h. $F_A(x, x) \geq 0 \; \forall x \in V$.

(b) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und A eine positiv definite, symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass F_A ein Skalarprodukt definiert.

Hinweis: Eine reelle Matrix M heißt „symmetrisch“ falls $M^T = M$ gilt und „positiv definit“ falls sie diagonalisierbar ist und alle ihre Eigenwerte positiv sind. Schreiben Sie x als Linearombination von Eingenvektoren von A.

Lösung :

(i) F_A ist bilinear:
$F_A(x_1 + ax_2, y) = x_1^T Ay + ax_2^T Ay = F_A(x_1, y) + aF(x_2, y)$ und $F(x, y_1 + by_2) = x^T Ay_1 + bx^T Ay = F(x, y_1) + bF(x, y_2)$.

(ii) F_A ist symmetrisch:
$F_A(x, y) = x^T Ay = (Ay)^T x = y^T A^T x = y^T Ax = F_A(y, x)$

(iii) F_A ist positiv definit:
Wir schreiben $x = \sum_i x_i b_i$, wobei $\{b_i\}$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von A ist; mit dazugehörigen Eigenwerten λ_i. Damit ergibt sich

$$F_A(x, x) = \sum_{i,j} x_i x_j v_i^T A v_j = \sum_{i,j} x_i x_j \lambda_j \delta_{ij} = \sum_i x_i^2 \lambda_i \geq 0$$

(c) Überprüfen Sie, ob F_A mit der folgen Wahl von A ein Skalarprodukt definiert.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Lösung : Die Matrix ist offenbar symmetrisch. Es verbleibt also zu zeigen, dass sie positiv definit ist. Dazu bestimmen wir die Eigenwerte der Matrix zu $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4 + \sqrt{13}$, und $\lambda_3 = 4 - \sqrt{13}$. Da alle Eigenwerte positiv sind, definiert die Matrix ein Skalarprodukt.

Aufgabe 4: Schwingende Kugeln

Als physikalisches Beispiel eines Eigenwertproblems betrachten wir eine Anordnung aus zwei leichten Kugeln mit Masse m_1 und einer schweren Kugel mit Masse m_2, die durch zwei Federn mit Federkonstante k so verbunden sind, dass sich die schwere Kugel in der Mitte zwischen den beiden anderen Kugeln befindet und mit jeder von beiden über jeweils einer der beiden Federn verbunden ist.
Die Auslenkungen x_1, x_2, und x_3 der Massen aus ihrer jeweiligen Ruhelage schreiben wir als Komponenten eines dreidimensionalen Vektors $x \in \mathbb{R}^3$. Ihre Bewegungsgleichungen lassen sich auf diese Weise in der folgenden Matrixgleichung zusammen fassen:

$$\ddot{x_1} = M \cdot x \tag{3}$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -2\frac{k}{m_2} & \frac{k}{m_2} \\ 0 & \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Hierbei ist $\ddot{x} = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$ der Vektor, der aus den Zeitableitungen der Geschwindigkeiten der Kugeln besteht. Im folgenden zeigen Sie wie diese Bewegungsgleichung mithilfe von Eigenvektoren in voneinander unabhängige Teile zerlegt werden kann.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix M. Ist die Matrix diagonalisierbar?

Lösung : Die Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{k}{m_1}$, und $\lambda_3 = -k\frac{m_2+2m_1}{m_1 m_2}$. Die Matrix ist diagonalisierbar, da die Summe der geometrischen Vielfachheiten gleich drei ist.

(b) Bestimmen Sie für alle drei Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3 jeweils den Eigenraum und geben sie für M eine Basis aus Eigenvektoren an.

Lösung : Eine Basis aus Eigenvektoren für M ist z. B. $b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (1,0,-1)$, und $b_3 = (m_1, -2m_2, m_1)$. Die Eigenräume sind in diesem Fal jeweils $\mathrm{Eig}(M, \lambda_i) = \mathrm{Span}(b_i)$.

(c) Schreiben Sie $x = (x_1, x_2, x_3)$ als Linearkombination der Eigenvektoren von M. Nutzen Sie anschließend die Eigenschaften der Eigenvektoren um die Bewegungsgleichung (3) in drei unabhängige Teile zu zerlegen.

Lösung :

Wir schreiben $x = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3$ mit $c_i \in \mathbb{R}$ als Vorfaktoren. Auf diese Weise wird die Bewegungsgleichung (3) zu

$$\sum_i c_i \ddot{b}_i = \sum_i c_i \lambda_i b_i.$$

Diese Gleichung zerfällt in drei sehr simple unabhängige Gleichungen für jeden der drei Eigenvektoren:

$$\ddot{b_i} = \lambda_i b_i.$$