① Definition:

Es sei V ein K-Vektorraum und $F \in End(V)$.

Def: $v \in V$ heißt „Eigenvektor" von F, falls ein $\lambda \in K$ existiert, s.d. $F(v) = \lambda \cdot v$ und $v \neq 0$.

* $\vec{0}$ kann kein EV sein! (sonst wär $\vec{0}$ EV für alles!)

! Wenn v EV zu F ist, dann sind auch alle $w \in Span(v)$ EV zu F mit $F(w) = \lambda w$!

Frage: gibt es eine Basis aus EV von F?

Def: Wenn eine Basis aus EV von F existiert, heißt F „diagonalisierbar" (Warum? In dieser Basis ist M_F eine Diagonalmatrix!)

Satz: Wenn F n paarweise verschiedene Eigenwerte hat, mit EV v_i $(i \leq n)$, so ist $\{v_i\}_{i \leq n}$ linear unabhängig. und $n \leq \dim(V)$.

Kor: Für $n = \dim(V)$ ist $\{v_i\}_{i \leq n}$ eine Basis von V! ($\Rightarrow$ F ist diagonalisierbar!)

* Was passiert wenn F nicht n paarweise versch. EW hat?

$\Rightarrow$ **Def:** $Eig(F,\lambda) := \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}$ ist „Eigenraum zu λ". $d(\lambda) := \dim(Eig(F,\lambda))$ ist „geometrische Vielfachheit" von λ!

(i) $Eig(F,\lambda)$ ist UVR in V.

(ii) λ ist EW von F $\Leftrightarrow$ $d(\lambda) > 0$.

(iii) $Eig(F,\lambda) = Ker(F - \lambda \mathbb{1})$

(iv) $Eig(F,\lambda_1) \cap Eig(F,\lambda_2) = \{0\}$ falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Bem: $Ker(F - \lambda \mathbb{1}) \neq \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\det(M_F - \lambda \mathbb{1}) = 0$! (mit M_F Matrixdarstellung von F!)
$\Rightarrow$ Det ist Basisunabhängig!
$\Rightarrow$ ähnliche Matrizen haben gleiche Det. $\Rightarrow$ $P_F(\lambda)$ ist wohldefiniert.

Def: $P_F(\lambda) := \det(F - \lambda \mathbb{1})$ ist das charakteristische Polynom von F.

(i) $\deg P_F = n$. (ii) $P_F(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ ist EW von F.

(iii) Wenn M_F Darstellung von F ist, so gilt $P_F(\lambda) = \det(M_F - \lambda E_n)$.

Jetzt können wir systematisch EW und EV von F bestimmen!

(i) EW sind Nullstellen von $P_F(\lambda)$! $\Rightarrow$ Vielfachheit der Nullstelle heißt algebraische Vielfachheit r_λ.

(ii) EV ist Lösung des Gleichungssystems $(M_F - \lambda E_n)v = 0$ $\Rightarrow$ Basis von $Eig(F,\lambda)$ und $d(\lambda)$!

=> Zusammenfassung:

(i) Wenn $P_F(\lambda)$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt ist F diagonalisierbar.

(ii) Wenn F diagonalisierbar ist, zerfällt $P_F(\lambda)$ in Linearfaktoren.

↳ Was ist mit mehrfachen Nullstellen? => F ist genau dann diagbar, wenn $\forall \lambda: r_\lambda = d(\lambda)$!

Satz: $F \in End(V)$. Folgendes ist äquivalent:

(i) F ist diagonalisierbar

(ii) $P_F(\lambda)$ zerfällt in Linearfaktoren und $d(\lambda) = r_\lambda \ \forall \lambda$ die EW.

(iii) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise versch. EW von F, so gilt $V = \bigoplus_{\lambda_i} Eig(F, \lambda_i)$.

Rezept:
1) Stelle $P_F(\lambda)$ auf und finde die Nullstellen.
2) Löse für jede Nullstelle λ das GL-System $0 = (M_F - \lambda E_n) v$ => Basis von $Eig(F, \lambda)$.
3) Prüfe ob jeweils $d(\lambda) = r_\lambda$. => Falls ja, ist F diagbar und die Basis ist durch $V = \bigoplus_{\lambda_i} Eig(F, \lambda)$ gegeben.

Eine weitere Sache: F und G heißen „simultan diagbar", falls es eine Basis gibt, in der G und F beide diagonalisiert sind.

Satz: F, G sind simultan diagbar genau dann wenn $F \circ G = G \circ F$.

Skalarprodukte:

Def: Sei V ein K-Vektorraum. $S: V \times S \to K$ heißt „Bilinearform", falls $S(v + av', w) = S(v) + aS(v', w)$ und $s(v, w_1 + b w_2) = S(v, w_1) + b\,S(v, w_2)$ (S ist linear in beiden Komponenten).

* Das kanonische Skalarprodukt ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform.

! symmetrisch: $S(x,y) = S(y,x)$; pos. def. $S(x,x) \geq 0$. mit $S(x,x) = 0$ iff $x = 0$.

Def. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Bilinearform heißt „Skalarprodukt" genau dann wenn sie symmetrisch und positiv definit ist.

=> Verallgemeinerung des kanonischen Skalarproduktes.

=> Skalarprodukt => Norm => Metrik => Winkel.

↳ Ein Skalarprodukt erlaubt die Definition einer verallgemeinerten „Betrags" und „Abstandes":

⇒ Norm: $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. (kanonisch $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$)

Metrik: $d(x,y) := \|x - y\|$. (kanonisch $d(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots (x_n - y_n)^2$).

Winkel: $\cos(\theta) := \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$ × Vektoren sind „senkrecht", falls $\langle x, y \rangle = 0$).

↳ Eigenschaften:

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Eigentlich def. von Norm.

M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2) $d(x,y) = d(y,x)$

M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Eigentlich def. von Metrik.

× Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Impliziert $\cos\theta \leq 1$!).

Was passiert in $\mathbb{C}$? ⇒ Wir können kein Skalarprodukt mehr definieren, weil „$0 \leq z$" keinen Sinn macht. ⇒ Lösung: suchen $V \times V \to \mathbb{R}$ Abbildung!

⇒ Kann nicht mehr Bilinear sein! (Zumindest f. $x = y$!)

def: Sesquilinearform: Eine Abb. $s : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt sesquilinear, falls

$s(v_1 + a v_2, w) = s(v_1, w) + a\, s(v_2, w)$ und $s(v, w_1 + b w_2) = s(v, w_1) + \bar{b}\, s(v, w_2)$.

× Eine Sesquilinearform heißt hermitesch, falls $s(v,w) = \bar{s}(w,v)$. ⇒ Impliziert $s(v,v) \in \mathbb{R}$!

× " " positiv definit, falls $s(v,v) > 0$

× Darstellungsmatrizen: $s_A : V \times V \to \mathbb{R}$, $x^T A y$ ist ~~Skalarproduktform~~ Bilinear

$s_A^{\mathbb{C}} : V \times V \to \mathbb{C}$, $x^T A \bar{y}$ ist Sesquilinear.

↳ symmetrisch ⇔ A symmetrisch

$s_A^{\mathbb{C}}$ hermitesch ⇔ A hermitesch ($A^T = \bar{A}$)

× A heißt positiv definit, falls $x^T A \bar{x} \in \mathbb{R}$ und $x^T A \bar{x} > 0$ für alle ($x \in \mathbb{C}^n / \mathbb{R}^n$)