Ferienkurs Mathematik für Physiker I
Blatt 3
(29.03.2017)

Aufgabe 1: Matrizenrechung

(a) Ermitteln Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ den Ausdruck $A^0 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3$.

(b) Berechnen Sie $\overline{B}^T B$ und $\overline{B}^T AB$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Bilden Sie -sofern möglich - mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

und den Vektoren

$$x = (1, 0, 4)^T, \; y = (8, -5)^T \text{ und } z = (3, 2)^T$$

die Ausdrücke $A+C$, $2B$, $A(z+y)$, $C(-4z)$, $(A+C)y$, AB, BC, AC^T, x^TA, y^Tz, yz^T.

Lösung

(a) Es ist

$$A^0 = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 26 \\ 20 & 29 & 38 \\ 26 & 38 & 50 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 132 & 192 & 252 \\ 192 & 279 & 366 \\ 252 & 366 & 480 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten daher

$$E_3 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 = \begin{pmatrix} 31 & 44 & 58 \\ 44 & 65 & 84 \\ 58 & 84 & 111 \end{pmatrix}$$

(b) Es ist

$$\overline{B}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{B}^T B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3, \; \overline{B}^T AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wegen $\overline{B}^T B = E_3$ ist das Konjugierttransponierte von B gleich dem Inversen. Man nennt diese Eigenschaft unitär.

(c) Es gilt

$$A + C = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix},\ 2B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -14 \end{pmatrix},$$

$$A(y+z) = Ay + Az = \begin{pmatrix} -31 \\ 41 \\ -26 \end{pmatrix},\ C(-4z) = -4Cz = \begin{pmatrix} -44 \\ 16 \\ -76 \end{pmatrix},$$

$$(A+C)y = Ay + Cy = \begin{pmatrix} -43 \\ 37 \\ -34 \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} -3 & -21 \\ 13 & -7 \\ - & -35 \end{pmatrix},\ BC \text{ ist nicht definiert,}$$

$$AC^T = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 9 \\ 8 & -2 & 17 \\ 19 & -10 & 22 \end{pmatrix}\ x^T A = \begin{pmatrix} 6 & -23 \end{pmatrix},\ y^T z = 14,\ yz^T = \begin{pmatrix} 24 & 16 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Determinante und Inverses

Zeigen Sie dass gilt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{K})\text{ist invertierbar} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$$

Berechnen Sie für diesen Fall das Inverse von A sowie dessen Determinante. Wie ist die Determinante von $A^{-1}A$?

Lösung Die Matrix A wird auf herkömmliche Art invertiert. D.h. wir machen den Ansatz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und nutzen solange Gaussumformungen bis links des Strichs die Einheitsmatrix steht. Rechts ist dann die Inverse Matrix gegeben als

$$\frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

da wir wissen, dass das Inverse eindeutig ist und der gefundene Ausdruck nur für $ad - bc \neq 0$ definiert ist, ist die oben genannte Äquivalenz gezeigt.
Die Determinante des Inversen kann einfach berechnet werden zu $\frac{1}{ad-bc}$, denn es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Da $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ gilt ist die Determinante von $A^{-1}A = E_2$ gegeben mit $\det(A^{-1}) \cdot \det(A) = \det(A)^{-1} \cdot \det(A) = \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1$.

Aufgabe 3: Determinante 1

Begründen Sie warum die Determinanten der folgenden Matrizen gleich null sind. Dazu muss die Determinante nicht explizit ausgerechnet werden.

(a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & -10 \\ 6 & -12 & 30 \end{pmatrix}$

(c) $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\det \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -20 & 15 & -20 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung

(a) Die Determinante enthält den Nullvektor (3. Spalte).

(b) Die Determinante enthält zwei proportionale Spalten (die 3. Spalte ist das 5-fache der 1.Spalte).

(c) Die 4. Zeile ist die Summe der ersten beiden Zeilen und somit ist sie linear Abhängig

(d) Die Determinante enthält zwei gleiche Spalte (1. und 3. Spalte)

Aufgabe 4: Determinante 2

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & a\sin\alpha & b\cos\alpha & ab \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & -a^2\sin\alpha & b^2\cos\alpha & a^2b^2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$

Hinweis: Zu Aufgabenteil (d): Es ist
$(a^2+1)\left[\left(\frac{-a^2b^2}{a^2+1}+b^2+1\right)\left(\frac{-a^2c^2}{a^2+1}+c^2+1\right)-\left(\frac{-a^2bc}{a^2+1}+bc\right)\left(\frac{-a^2bc}{a^2+1}+bc\right)\right] = a^2+b^2+c^2+1.$

Lösung

(a) $\det(A) = 4$

(b) $\det(B) = 18$

(c) $\det(C) = (x-1)^2(x+2)$

(d) $\det(D) = a^2+b^2+c^2+1$

(e) $\det(E) = a^2+b^2$

Aufgabe 5: Lineare Gleichungssysteme 1

Ermitteln Sie die Lösungsmenge des komplexen Gleichungssystems $(A|b)$ mit

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2i \\ \frac{5}{2+i} & \frac{(2+4i)^2}{1-i} \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3+i \\ 3+16i \end{pmatrix}$$

Lösung Wir vereinfachen zunächst die komplexen Brüche. Es ist

$$\frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(2-i)}{5} = 2-i$$

und

$$\frac{(2+4i)^2}{1-i} = \frac{4+16i-16}{1-i} = \frac{(-12+16i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-12-12i+16i-16}{2} = -14+2i$$

das resultierende LGS führt nun auf

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i \end{array}\right).$$

Damit gilt also $L = \{(i, -i)\}$

Aufgabe 6: Lineare Gleichungssysteme 2

Gegeben ist das Gleichungssystem $(A|b)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \\ 16 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von α und β besitzt das Gleichungssystem

(a) eine eindeutige Lösung

(b) keine Lösung

(c) unendlich viele Lösungen

(d) Geben Sie die Lösungsmenge für den Fall unendlich vieler Lösungen explizit an

Lösung mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren erhält man

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 & \beta \\ -1 & 0 & 1 & \alpha & 16 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \beta - 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 & 3(\beta + 2) \end{array}\right)$$

(a) Es gibt genau dann eine eindeutige Lösung venn $\alpha - 1 \neq 0 \Leftarrow \alpha \neq 1$ ist

(b) Es gibt genau dann keine Lösung wenn $\alpha - 1 = 0 \wedge 3(\beta + 2) \neq 0 \Leftarrow \alpha = 1 \wedge \beta \neq 2$

(c) Es gibt genau dann unendlich viele Lösungen, wenn $\alpha - 1 = 0 \wedge 3(\beta + 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \wedge \beta = -2$

(d) Die Lösungsmenge im Falle unendlich vieler Lösungen ergibt sich zu

$$\alpha = 1 \wedge \beta = -2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit folgt
$\Rightarrow x_4 = s \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow x_3 = -2 - s$
$\Rightarrow x_2 = 2 - 3s - 3(-2 - s) = 8$
$\Rightarrow x_1 = s + (-2 - s) - 2 \cdot 8 = -18$
und so letztendlich $\Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} -18 \\ 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} |s \in \mathbb{R} \right\}$