Ferienkurs Mathematik für Physiker I
Blatt 3
(29.03.2017)

Aufgabe 1: Matrizenrechung

(a) Ermitteln Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ den Ausdruck $A^0 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3$.

(b) Berechnen Sie $\overline{B}^T B$ und $\overline{B}^T AB$ für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Bilden Sie -sofern möglich - mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

und den Vektoren

$$x = (1, 0, 4)^T,\ y = (8, -5)^T \text{ und } z = (3, 2)^T$$

die Ausdrücke $A + C$, $2B$, $A(z + y)$, $C(-4z)$, $(A + C)y$, AB, BC, AC^T, $x^T A$, $y^T z$, yz^T.

Aufgabe 2: Determinante und Inverses

Zeigen Sie dass gilt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; \mathbb{K}) \text{ist invertierbar} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$$

Berechnen Sie für diesen Fall das Inverse von A sowie dessen Determinante. Wie ist die Determinante von $A^{-1}A$?

Aufgabe 3: Determinante 1

Begründen Sie warum die Determinanten der folgenden Matrizen gleich null sind. Dazu muss die Determinante nicht explizit ausgerechnet werden.

(a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & -10 \\ 6 & -12 & 30 \end{pmatrix}$

(c) $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\det \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -20 & 15 & -20 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Determinante 2

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & a\sin\alpha & b\cos\alpha & ab \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & -a^2\sin\alpha & b^2\cos\alpha & a^2b^2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$

Hinweis: Zu Aufgabenteil (d): Es ist
$(a^2+1)\left[\left(\frac{-a^2b^2}{a^2+1}+b^2+1\right)\left(\frac{-a^2c^2}{a^2+1}+c^2+1\right)-\left(\frac{-a^2bc}{a^2+1}+bc\right)\left(\frac{-a^2bc}{a^2+1}+bc\right)\right] = a^2+b^2+c^2+1.$

Aufgabe 5: Lineare Gleichungssysteme 1

Ermitteln Sie die Lösungsmenge des komplexen Gleichungssystems $(A|b)$ mit

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2i \\ \frac{5}{2+i} & \frac{(2+4i)^2}{1-i} \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3+i \\ 3+16i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: Lineare Gleichungssysteme 2

Gegeben ist das Gleichungssystem $(A|b)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \\ 16 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von α und β besitz das Gleichungssystem

(a) eine eindeutige Lösung

(b) keine Lösung

(c) unendlich viele Lösungen

(d) Geben Sie die Lösungsmenge für den Fall unendlich vieler Lösungen explizit an