Ferienkurs Mathematik für Physiker I
Blatt 2
(28.03.2017)

Aufgabe 1: Lineare (Un-)Abhängigkeit und Linearkombinationen

(a) Prüfen Sie die folgenden Vektoren in den jeweiligen Vektorräumen auf lineare Abhängigkeit.

(a_1) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

(a_2) $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$ im $\mathbb{R}^3$

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear Abhängig?

Lösung

(a) (a_1) Wir machen den Ansatz

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot \sqrt{2} + \lambda_3 \cdot \sqrt{3} = 0$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. Es gilt folglich

$$\lambda_2 \cdot \sqrt{2} + \lambda_3 \cdot \sqrt{3} = -\lambda_1 \in \mathbb{Q}$$

und daher ist auch

$$(-\lambda_1)^2 = 2\lambda_2^2 + 2\lambda_2\lambda_3\sqrt{6} + 3\lambda_3^2 \in \mathbb{Q}$$

Nun folgt aber für $\lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ dass $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Für $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$ folgt $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ sowie für $\lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$ dass $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ - allesamt widersprüchliche Aussagen. Es muss also $\lambda_i = 0 \ \forall i \in \{1,2,3\}$ gelten, woraus die lineare Unabhängigkeit der (eindimensionalen) Vektoren über $\mathbb{Q}$ folgt.

(a_2) Da $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ gilt, sind die Vektoren linear abhängig.

(b) Als Matrix geschrieben ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & t & 11 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Welches nach Zeilenumformungen auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4t-37 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

führt. Lineare Abhängigkeit ist Gleichbedeutend mit dem verschwinden der zweiten Zeile (rang<3) und damit der Bedingung $4t = 37$ oder $t = \frac{37}{4}$.

Aufgabe 2: Vektorräume

Bestimmen Sie ob die folgenden Teilmengen T_i Untervektorräume (UVR) der angegebenen Vektorräume sind.

(a) $T_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 | x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$

(b) $T_2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

(c) $T_3 = \{(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n | x_1 \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^n$

(d) $T_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

(e) $T_5 = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Lösung

(a) T_1 ist ein UVR.

(b) T_2 ist keiner, da z.B.: $(1, 0, 0)^T \in T_2$ aber $2 \cdot (1, 0, 0)^T = (2, 0, 0)^T \notin T_2$.

(c) T_3 ist ebenfalls kein UVR, da $\sqrt{2} \cdot (1, 0, \ldots, 0)^T \notin T_3$. Es gibt also ein lineares Vielfaches mit einem Element aus dem zugrundeliegenden Körper ($\mathbb{R}$) eines Vektors der in T_3 liegt welches selbst nicht mehr in T_3 liegt ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

(d) Da $x_1^2 + x_2^4 > 0\ \forall\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ gilt, folgt dass (0,0) das einzige Element in T_4 ist. Die Bedingungen an einen Untervektorraum sind also trivial erfüllt. Der Nullvektor ist Teil jedes Vektorraums.

(e) T_5 ist ein UVR. Die Nullabbildung ist trivial enthalten. Weiter gilt: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x)$ sowie $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot f(-x) = (\lambda f)(-x)$ da sowohl f als auch g in T_5 liegen.

Aufgabe 3: Erzeugendensysteme und Basis

(a) Sei

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie nun ob $B := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bildet.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des von der Menge

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

erzeugten UVR $T = \langle X \rangle$ des $\mathbb{R}^4$

Lösung

(a) Der Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ hat die Dimension 4 (da vier Freiheitsgrade). Es ist daher ausreichend die lineare Unabhängigkeit von B zu zeigen, da vier linear Unabhängige Vektoren eines vierdimensionalen Raumes eine Basis bilden. Machen wir also den Ansatz:

$$\lambda_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_4 \mathbf{v_4} = \mathbf{0}$$

ausgeschrieben lautet diese Gleichung

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 + \lambda_3 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir können ablesen, dass $\lambda_1 = 0$ gelten muss. Damit folgt $\lambda_2 = 0$ und so müssen auch die restlichen skalare null sein, damit die Gleichung erfüllt ist. Da also die einzige Möglichkeit unseren Ansatz zu erfüllen die Wahl aller $\lambda_i = 0$ ist, folgt nach der Definition der linearen Unabhängigkeit auch selbige für die Menge B. B ist also eine Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$

(b) Um zur Lösung zu gelangen schreibt man die in der Aufgabenstellung gegebenen erzeugenden Vektoren von U als Zeilen in eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

welche sich auf Zeilenstufenform gebracht folgendermaßen aussieht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erkennen also, dass die ersten vier Zeilen linear unabhängig sind. Damit sind aber auch die korrespondierenden ersten vier Vektoren von X linear unabhängig. Also bildet

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\langle X \rangle = \mathbb{R}^4$.

Man kann dieses Verfahren etwas abkürzen: Sobald man erkennt dass die Matrix den Rang 4 hat, weiß man dass der aufgespannte Untervektorraum vierdimensional ist. Deshalb ist eine beliebige Basis des $\mathbb{R}^4$ als Basis von T wählbar; etwa die Standardbasis $E_4 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$.

Aufgabe 4: Lineare Abbildungen 1

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität

(a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x + 2y, x)$

(b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ für $b \neq 0$ und $b = 0$.

(c) $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + \sqrt{2}y$ (über $\mathbb{Q}$)

(d) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$

(e) $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1)$

(f) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ (über $\mathbb{R}$)

Lösung Es werden mit Ausnahme von Teilaufgabe (e) alle gegebenen Abbildungen mit f bezeichnet.

(a) Es gilt $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\forall\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2)) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ &= (3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2),\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1(3x_1 + 2y_1,\ x_1) + \lambda_2(3x_2 + 2y_2,\ x_2) \\ &= \lambda_1 f(x_1, y_1) + \lambda_2 f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

und somit ist F linear

(b) Für $b \neq 0$ gilt $f(0) \neq 0$ und somit $\lambda f(0) = \lambda b \neq b = F(\lambda \cdot 0) = f(0)$ für $\lambda \neq 1$ also $\lambda f(0) \neq F(\lambda \cdot 0)$. Damit ist f nicht linear. Für $b = 0$ hingegen ist f linear, was einfach und nachgerechnet werden kann.

(c) (c) ist linear, was Analog zu (a) nachgerechnet werden kann

(d) $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt $f(x + iy) = x - iy$. Mit $\lambda = i$ und $z = i$ gilt

$$F(\lambda \cdot z) = f(i^2) = f(-1) = -1$$

aber

$$\lambda \cdot f(z) = i \cdot f(i) = i \cdot (-i) = 1$$

womit F nicht linear ist.

(e) Es bezeichnet φ die gegebene Abbildung und f ein Element aus $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dem Vektorraum der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Die $\mathbb{R}$-Linearität folgt unmittelbar aus den Eigenschaften des Vektorraumes und des Körpers der reellen Zahlen. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(1) \\ &= (\lambda_1 f_1)(1) + (\lambda_2 f_2)(1) \\ &= \lambda_1 \cdot f_1(1) + \lambda_2 f_2(1) \\ &= \lambda_1 \cdot \varphi(f_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(f_2) \end{aligned}$$

womit die Linearität gezeigt ist.

(f) Im Gegensatz zu (d) ist f über $\mathbb{R}$ linear. Es gilt für $z_r = x_r + iy_r$:

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) &= f(\lambda_1(x_1 + iy_1) + \lambda_2(x_2 + iy_2)) \\
&= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + i(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)) \\
&\overset{(*)}{=} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - i(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\
&= \lambda_1(x_1 - iy_1) + \lambda_2(x_2 + iy_2) \\
&= \lambda_1 f(z_1) + \lambda_2 f(z_2)
\end{aligned}$$

wobei an der stelle (*) verwendet wurde, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ sein muss. Somit ist f $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear.

Aufgabe 5: Lineare Abbildungen 2

Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ (d.h.: $\forall\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ gilt $\varphi(\varphi(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$), aber $\varphi \neq \pm\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ (d.h. $\varphi \notin \{\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}, \mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}\}$). Zeigen Sie
Es gibt eine Basis $\mathrm{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ des $\mathbb{R}^2$ mit $\varphi(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1$ und $\varphi(\mathbf{b}_2) = -\mathbf{b}_2$.

Hinweis: Wählen Sie geeignete Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}'$. Betrachten Sie dann $\mathbf{v}+\varphi(\mathbf{v})$ und $\mathbf{v}'-\varphi(\mathbf{v}')$.

Lösung Wegen $\varphi \neq \pm\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ existiert ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(\mathbf{v}) \neq -\mathbf{v}$ also $\mathbf{v}+\varphi(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ und ebenso existiert ein $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(\mathbf{v}') \neq \mathbf{v}'$ und folglich $\mathbf{v}' - \varphi(\mathbf{v}') \neq \mathbf{0}$. Wir setzen $\mathbf{b}_1 := \mathbf{v} + \varphi(\mathbf{v})$ und $\mathbf{b}_2 := \mathbf{v}' - \varphi(\mathbf{v}')$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{b}_1) &= \varphi(\mathbf{v} + \varphi(\mathbf{v})) = \varphi(\mathbf{v}) + \varphi^2(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{b}_1 \\
\varphi(\mathbf{b}_2) &= \varphi(\mathbf{v}' - \varphi(\mathbf{v}')) = \varphi(\mathbf{v}') - \varphi^2(\mathbf{v}') = \varphi(\mathbf{v}') - \mathbf{v}' = -\mathbf{b}_2
\end{aligned}$$

Nun muss noch gezeigt werden, dass $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bildet. Wir wählen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ so dass $\alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ gilt. Dann folgt durch Anwenden dieser Identität

$$\mathbf{0} = \varphi(\mathbf{0}) = \varphi(\alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2) = \alpha\varphi(\mathbf{b_1}) + \beta\varphi(\mathbf{b}_2) = \alpha\mathbf{b}_1 - \beta\mathbf{b}_2$$

Mit Addition oder Subtraktion der beiden Identitäten kann gefolgert werden kann, dass $2\alpha\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ und $2\beta\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ womit $\alpha = \beta = 0$ sein muss. Damit sind $\mathbf{b}_1$und $\mathbf{b}_2$ linear unabhängig und aus Dimensionsgründen eine Basis des $\mathbb{R}^2$.