Ferienkurs Mathematik für Physiker I
Blatt 2
(28.03.2017)

Aufgabe 1: Lineare (Un-)Abhängigkeit und Linearkombinationen

(a) Prüfen Sie die folgenden Vektoren in den jeweiligen Vektorräumen auf lineare Abhängigkeit.

(a_1) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

(a_2) $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)$ im $\mathbb{R}^3$

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear Abhängig?

Aufgabe 2: Vektorräume

Bestimmen Sie ob die folgenden Teilmengen T_i Untervektorräume (UVR) der angegebenen Vektorräume sind.

(a) $T_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 | x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$

(b) $T_2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

(c) $T_3 = \{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n | x_1 \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^n$

(d) $T_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

(e) $T_5 = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Aufgabe 3: Erzeugendensysteme und Basis

(a) Sei

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie nun ob $B := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bildet.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des von der Menge

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

erzeugten UVR $T = \langle X \rangle$ des $\mathbb{R}^4$

Aufgabe 4: Lineare Abbildungen 1

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität

(a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x + 2y, x)$

(b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ für $b \neq 0$ und $b = 0$.

(c) $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + \sqrt{2}y$ (über $\mathbb{Q}$)

(d) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$

(e) $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1)$

(f) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ (über $\mathbb{R}$)

Aufgabe 5: Lineare Abbildungen 2

Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ (d.h.: $\forall\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ gilt $\varphi(\varphi(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$), aber $\varphi \neq \pm\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ (d.h. $\varphi \notin \{\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}, \mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}\}$). Zeigen Sie
Es gibt eine Basis $\mathrm{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ des $\mathbb{R}^2$ mit $\varphi(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1$ und $\varphi(\mathbf{b}_2) = -\mathbf{b}_2$.

Hinweis: Wählen Sie geeignete Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}'$. Betrachten Sie dann $\mathbf{v}+\varphi(\mathbf{v})$ und $\mathbf{v}'-\varphi(\mathbf{v}')$.