Ferienkurs Mathematik für Physiker I
Skript Teil 2
(28.03.2017)

1 Vektorräume

Bevor wir zur Definition eines Vektorraumes kommen erinnern wir noch einmal kurz an diejenige des Körpers:

Definition: Körper Ein Körper ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ für das gilt

(K1) (K, +) ist eine abelsche Gruppe

(K2) Mit 0 dem neutralen Element von $(K, +)$ ist $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe

(K3) Es gilt das Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in K$ gilt :

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Mit diesem Wissen können wir uns nun der wichtigsten Struktur der Linearen Algebra widmen; dem Vektorraum

Definition: Vektorraum Mit dem Körper K ist eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+ : V \times V \to V,\ (a, b) \mapsto a + b \quad \text{und} \quad \cdot : K \times V \to V,\ (\lambda, b) \mapsto \lambda \cdot b$$

ein **K-Vektorraum** wenn gilt:

(V1) Die Verknüpfung + ist assoziativ, also

$$(x + y) + z = x + (y + z)\ \forall x, y, z \in V$$

(V2) Die Verknüpfung + ist kommutativ; es gilt: $x + y = y + x\ \forall x, y \in V$.

(V3) Es gibt ein neutrales Element bezüglich der Verknüpfung +, der Nullvektor 0. Für diesen gilt:

$$0 + v = v + 0 = v\ \forall v \in V.$$

(V4) Jedes Element $v \in V$ besitzt ein inverses Element bezüglich +, geschrieben als $-v$ für das gilt $c + (-v) = -v + v = 0\ \forall v \in V$.

(V5) Die Verknüpfung $\cdot$ ist assoziativ, also gilt: $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v\ \forall \lambda, \mu \in K\ \forall v \in V$.

(V6) Es gilt $1 \cdot v = v\ \forall v \in V$, wobei 1 das Einselement des dem K -Vektorraum zugrundeliegenen Körpers ist.

(V7) Es gilt das Distributivgesetz: $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \ \forall \lambda \in K \ \forall v, w \in V$.

Die Elemente $v \in V$ sind **Vektoren**. Die Verknüpfung $+$ heißt Vektoraddition und $\cdot$ heißt Skalarmultiplikation.

Eine häufige Klausuraufgabe ist es zu prüfen ob bestimmte Teilmengen eines Vektorraumes ebenfalls einer sind - ein Untervektorraum. Das zu tun ist nicht schwer: man gehe wie folgt vor:

Rezept: Nachweis eines Untervektorraumes Wenn $U \in V$ als Teilmenge des K-Vektorraumes V gegeben ist, begründe:

(1) $0 \in U$,

(2) $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$,

(3) $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in U$.

Sind diese drei Bedingungen erfüllt, dann ist die Teilmenge U von V ein Untervektorraum und als solcher wieder ein K-Vektorraum.

Anmerkung: Die restlichen Eigenschaften eines Vektorraums, die für U nicht geprüft werden- etwa die Distributivität- werden aus dem Vektorraum V vererbt.

Dazu nun ein

Beispiel: Untervektorraum Ist die Menge $U = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(1) = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Wir prüfen

(1) Die Nullfunktion $f_0(x) = 0$ erfüllt $f_0(1) = 0$ deshalb $\Rightarrow f_0 \in U$

(2) U ist abgeschlossen bezüglich der Addition :

$$\begin{aligned} f, g \in U &\Rightarrow f(1) = 0,\ g(1) = 0 \\ &\Rightarrow (f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0 \\ &\Rightarrow f + g \in U \end{aligned}$$

(3) U ist abgeschlossen bezüglich Multiplikation mit einem Skalar

$$f \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda f \in U$$

2 Dimension und Basis

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Ein Vektor $v \in V$ lässt sich als **Linearkombination** der Vektoren $v_1, ..., v_k$ schreiben, wenn gilt

Definition: Linearkombination

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Wir nennen nun $\langle v_1, ...v_k \rangle := \text{span}(v_1, ..., v_k) := \left\{ v \in V | v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \lambda_i \in K \right\}$ das Erzeugnis oder den **Span** von den Vektoren $v_1, ...v_k$. Das ist also gerade diejenige Menge an Vektoren die durch eine beliebige Linearkombination der gegebenen Vektoren $v_1, ...v_k$ erhalten werden kann.
In diesem Zuge ist das Konzept der linearen (un-)abhängigkeit wichtig.

Definition: Lineare Unbhängigkeit Eine Menge an Vektoren heißt linear unabhängig, wenn die folgende Implikation gültig ist:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$$

andernfalls sind $(v_1, ..., v_k)$ **linear abhängig**

Definition: Erzeugendensystem Zu einem K-Vektorraum V ist nun eine endliche Menge an n Vektoren $(v_i)_{i \in J}$ mit $J := \{1, ..., n\}$ ein **Erzeugendensystem**, wenn für alle $v \in V$ $\lambda_i \in K$ existieren, so dass gilt

$$v = \sum_{i \in J} \lambda_i v_i.$$

Diese Definitionen münden in die folgenden zwei Rezepte, die im Hinblick auf die Klausur sinnvoll sein können:

Rezept: Darstellen eines Vektors als Linearkombination Gegeben ist ein Vektor v sowie die Vektoren $v_1, ...v_n$ aus der Basis (dem Erzeugendensystem) eines Vektorraumes V. Zur Prüfung ob v eine Linearkombination von $v_1, ...v_n$ ist geht man folgendermaßen vor:

(1) Mache den Ansatz $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = v$ mit den Unbestimmte λ_i

(2) Wenn die Gleichung in (1) eine Lösung hat, dann ist v eine Lineakrombination der$v_1, ...v_n$; nächster Schritt.
Falls nein, so ist v keine Linearkombination der $v_1, ...v_n$ und somit nicht Element im Erzeugnis dieser Vektoren.

(3) Bestimme nun die Lösung $\lambda_1, ...\lambda_n$ der Gleichung in (2) und erhalte eine Darstellung für v.

Dazu ein kurzes

Beispiel: Linearkombination Wir prüfen ob das Polynom $p = 2x + 1 \in \mathbb{R}_{[x]}$ eine Linearkombination von $p_1 = x + 1$ und $p_2 = 1$ ist:

(1) Der Ansatz $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = p$ liefert die Polynomgleichung:

$$\lambda_1 x + \lambda_1 + \lambda_2 = 2x + 1$$

(2) Diese Gleichung ist lösbar, weshalb p eine Linearkombination von p_1 und p_2 ist.

(3) Die eindeutige Lösung der Gleichung in (2) lautet $(\lambda_1, \lambda_2) = (2, -1)$ und somit $p = 2p_1 - p_2$.

Das zweite Rezept ist eines zum Nachweis der linearen (Un-)Abhängigkeit von einer Menge von Vektoren:

Rezept: Nachweis linearer (Un-)Abhängigkeit Gegeben ist die Teilmenge $X \subseteq V$ des K-Vektorraums V mit dem Nullvektor 0_v. Wir prüfen die lineare (Un-)Abhängigkeit wie folgt:

(1) Mache den Ansatz $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_v$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$.

(2) Falls die Gleichung aus (1) nur erfüllbar ist wenn $\lambda_i = 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$, dann ist X linear unabhängig. Falls es eine Lösung mit mindestens einem $\lambda_i \neq 0$ gibt, ist X linear abhängig.

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt **Basis**. Anders ausgedrückt: Es gilt V = span$(v_1, ..., v_n)$. Eine Basis hat folgende wichtige Eigenschaften:

(1) Jeder K-Vektorraum hat eine Basis,

(2) Jedes Erzeugendensystem von V enthält eine Basis von V,

(3) Jede linear unabhängige Teilmenge kann zu einer Basis ergänzt werden,

(4) Jedes Element in einem Vektorraum kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden,

(5) Zwei Basen eines Vektorraums haben gleich viele Elemente,

(6) Die Anzahl an Elementen in einer Basis ist gleich der Dimension des Vektorraumes.

(7) Weiter gelten folgende nützliche Regeln:

- Gilt $\dim(V) = n$, dann bilden je n linear unabhängige Vektoren und jedes Erzeugendensystem mit n Elementen ist eine Basis.
- Gilt $\dim(V) = n$, so sind mehr als n Vektoren zwangsweise linear abhängig.
- Ist U ein Untervektorraum von V mit $U \subsetneq V$ so gilt dim(U)< dim(V).
- Ist U ein Untervektorraum von V mit dim(U)= dim(V), so ist U =V.

Die dritte Aussage wird als Basisergänzungssatz bezeichnet. Ihre Aussage wird oft als Aufgabe formuliert. Man soll eine gegebene Menge an Vektoren zu einer Basis verkürzen oder verlängern. Dazu das folgende Rezept:

Rezept: Verkürzen eines Erzeugendensystems und verlängern einer linear unabhängigen Menge zu einer Basis Gegeben ist ein Erzeugendensystem X eines K-Vektorraums V. Man bestimmt dann eine Basis $B \subseteq X$ von V folgendermaßen:

(1) Prüfe ob X linear unabhängig ist (s.o.)
Falls ja: X ist eine Basis.
Falls nein: Entferne aus X die Elemente $a_1, ...a_r$ die eine Linearkombination der anderen Elemente aus X sind und setze $\tilde{X} := X \setminus \{a_1, ..., a_r\}$

(2) Beginne mit $\tilde{X}$ statt X von vorne.

Wenn eine linear unabhängige Teilmenge X eines Vektorraumes V gegeben ist bestimmt man die Basis B mit $X \subseteq B$ von V folgendermaßen:

(1) Prüfe ob X ein Erzeugendensystem von V ist.
Falls ja: X ist eine Basis.
Falls nein: Wähle aus V die Elemente $a_1, ...a_r$, sodass $X \cup \{a_1, ...a_r\}$ linear unabhängig ist und setze $\tilde{X} := X \cup \{a_1, ..., a_r\}$

(2) Beginne mit $\tilde{X}$ statt X von vorne.

Dazu die folgenden zwei Beispiele:

Beispiel: Basis und Lineare Unabhängigkeit Bilden die Vektoren $v_1 := (0, 2, 1)^T, v_2 := (1, 2, 0)^T, V_3 := (2, 0, 1)^T$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$? ?

Wir machen also den Ansatz

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$$

und suchen Lösungen für $\lambda_1, \lambda_2.\lambda_3 \in \mathbb{R}$ Wir überführen das Gleichungssystem in Matrixschreibweise und lösen das resultierende homogene Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

was nur für $\lambda_1, \lambda_2.\lambda_3 = 0$ lösbar ist - sie sind also linear unabhängig. Aus Dimensionsgründen bilden die Vektoren eine Basis.

3 Lineare Abbildungen

Die Linearität ist eine Eigenschaft die eine Abbildung haben kann. Diese Eigenschaft ist in der Linearen Algebra von besonderer Bedeutung, da jede solche zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen als Matrix dargestellt werden kann (und umgekehrt ist jede Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix eine lineare Abbildung).

Definition: Lineare Abbildung Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen K-Vektorräumen V und W heißt **linear** (genauer *K-linear* oder *Homomorphismus von K-Vektorräumen*) wenn $\forall\ v, w \in V, \forall\ \lambda \in K$ gilt :

(L1) $f(v + w) = f(v) + f(w)$

(L2) $f(\lambda v) = \lambda \cdot f(w)$.

Was zu einer einzelnen Bedingung zusammengefasst werden kann:

(L) $f(\lambda v + \mu w) = \lambda \cdot f(v) + \mu \cdot f(w)$

Dabei darf das μ auch weggelassen werden. Wichtig ist, dass im Laufe der Rechnung einmal gezeigt wird, dass die Skalarmultiplikation ($L2$) erfüllt.

Der Begriff des Homomorphismus kann noch präzisiert werden, so nennt man eine lineare Abbildung $f : V \to W$

- *Isomorphismus* wenn f bijektiv ist,
- *Endomorphismus* wenn $V = W$ ist,
- *Automorphismus* wenn f Iso- und Endomorph ist.

Ist eine Abbildung $f : V \to W$ linear so gilt

- $f(0) = 0$ und $f(v - w) = f(v) - f(w)$.
- $f(\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \cdots \lambda_n \cdot f(v_n)$.
- ist die Menge $\{v_1, ...v_n\}$ linear abhängig, so ist auch $f(\{v_1, ...v_n\})$ linear abhängig.
- $\dim f(V) \leq \dim(V)$.
- Ist f isomorph, so ist $f^{-1} : W \to V$ linear.

Diese Erkenntnisse führen zu dem folgenden Rezept:

Rezept: Linearität einer Abbildung prüfen Gegeben ist die Abbildung $f : V \to W$ mit V,W zwei K-Vektorräumen. Nutze das folgende Vorgehen um die Linearität von f zu prüfen:

(1) Gilt $f(0) = 0$?
Falls nein: f ist nicht linear.
Falls ja: Weiter im nächsten Schritt

(2) Wähle $\lambda \in K$ und $v, w \in V$ und versuche eine der beiden gleichwertigen Bedingungen nachzuweisen:

- $f(v + w) = f(v) + f(w)$ und $f(\lambda v) = \lambda \cdot f(w)$.

- $f(\lambda v + \mu w) = \lambda \cdot f(v) + \mu \cdot f(w)$.

Gelingt der Nachweis nicht, weiter im nächsten Schritt:

(3) Suche Zahlen λ oder Vektoren v, w so dass eine der Gleichungen aus (2) nicht erfüllt ist.

Wenn in einer Abbildung f höhere als die erste Potenz oder nichtlineare Funktionen wie sin, cos, exp oder Produkte von Koeffizienten von v beziehungsweise w auftauchen, ist das ein starker Hinweis auf Nichtlinearität und man beginnt am besten in Punkt (3).
Dazu folgendes

Beispiel: Lineare Abbildung Es seien die Vektorräume V = W = $\mathbb{R}_{[x]_n} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ mit $n \geq 1$. Die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}_{[x]_n} \to \mathbb{R}_{[x]_n},\ f(p) \mapsto p'$$

ist linear. Sie erfüllt $f(0) = 0$ und es gilt

$$f(\lambda p + q) = (\lambda p + q)' = \lambda p' + q' = \lambda \cdot f(p) + f(q)$$

für die Polynome n-ten Grades $p, q \in \mathbb{R}_{[x]_n}$.

Im Zusammenhang mit der linearen Abbildung sind nun im weiteren die folgenden Definitionen wichtig:

Definition: Kern einer linearen Abbildung/ einer Matrix Mit einer linearen Abbildung $f : V \to W$ heißt die Menge

$$\ker(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

Kern der linearen Abbildung f und analog zur Matrix A die Menge

$$\ker(A) := \{v \in V \mid A \cdot v = 0\}$$

Kern der Matrix A.

Definition: Bild Zur linearen Abbildung $f : V \to W$ ist das **Bild** dieser die Menge an Vektoren aus W die f tatsächlich annimmt, also $\mathrm{Im}(f) := \{w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w\}$

Wir bemerken dazu, dass das Bild einer Matrix immer das Erzeugnis ihrer Spaltenvektoren ist.

Definition: Darstellungsmatrizen Mit der K-linearen Abbildung $f : V \to W$ zwischen den endlichdimensionalen Vektorräumen V und W sowie den Basen $A := (v_1, ...v_n)$ von V und B $:= (w_1, ...w_m)$ von W. Für jedes $j = 1, 2, ...n$ ist dann $f(v_j)$ ein Element aus W, besitzt also eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der Basis B. Wir schreiben die

Koeffizienten dieser Linearkombination in die j-te Spalte der Matrix $A \in M_{m,n}(K)$.
Mit anderen Worten: $A = (a_{ij})$ ist bestimmt durch:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i \text{ j = 1, 2, ..., n.}$$

Die hierdurch definierte Matrix bezeichnen wir als **Darstellungsmatrix** und schreiben $M_B^A(f)$.

Man beachte, dass hier für die Basen "()" statt "{}" steht, da es sich um ein Tupel, nicht lediglich eine Menge handelt. Die Reihenfolge der Elemente ist von Bedeutung.
Die Darstellungsmatrix bezüglich der Identitätsabbildung $M_B^A(\text{id})$ heißt **Transformationsmatrix** und unternimmt einen Basiswechsel von A nach B.
Die folgenden Sätze sind für lineare Abbildungen relevant. Sei also $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W dann gilt

- f injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker(f) = \{0\}$.
- f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\text{im}(f)$ = W.
- wenn f injektiv und dim V = dim W, dann ist f auch surjektiv. (Dies folgt aus den Vorangegangenen Sätzen).
- $\ker(f)$ ist ein Untervektorraum von V und $\text{Im}(f)$ ist ein Untervektorraum von W.
- (Basiswechselsatz) mit A, A' Basen von V und B, B' Basen von W gilt:
$$M_{B'}^{A'}(f) = M_{B'}^{B}(\text{id}) \cdot M_B^A(f) \cdot M_A^{A'}(\text{id})$$
- (Dimensionssatz)
$$\dim(\text{V}) = \dim \ker(f) + \dim \text{im}(f)$$

Interessiert einen die Dimension einer Summe von Vektorräumen, so gilt:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Diese Definitionen und Sätze führen uns auf das folgende Rezept für Prüfungsaufgaben:

Rezept: Darstellungsmatrizen Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V und W. Es bezeichnet $A := (v_1, ...v_n)$ die Basis von V und B $:= (w_1, ...w_m)$ die Basis von W. Die Einträge der Darstellungsmatrix errechnen sich dann folgendermaßen:

(1) Bilde für jedes $i = 1,\ 2,\ ..., n$ den Basisvektor v_i mittels f ab, errechne also $f(v_i)$.

(2) Stelle diese Bild als Linearkombination der Basisvektoren aus B dar, berechne also
$$f(v_i) = \lambda_1 w_1 + \cdots \lambda_m w_m$$

(3) Trage λ_k in die k-te Zeile der i-ten Spalte der Darstellungsmatrix $M_B^A(f)$ ein.

(4) Wiederhole diese Prozedur für alle i.

Die entstandene Matrix ist die Darstellungsmatrix von A unter f in Koordinaten von B. Das Anwenden der Abbildung f auf einen Vektor (dargestellt in Koordinaten von A) und anschließender Wechsel zu Basis B ist dasselbe wie das multiplizieren mit der Darstellungsmatrix.

Dazu nun ein

Beispiel: Darstellungsmatrizen . Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2)^T \mapsto (-x_2, x_1)^T$ mit den Basen $A := \{(1,1)^T, (0,1)^T\}$ und $B := \{(-1,-1)^T, (1,0)^T\}$.

(1) Wir berechnen die Bilder der Vektoren von A:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

(2) Wir stellen die Elemente als Linearkombination der Basiselemente aus B dar:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

(3) Eintragen der Koeffizienten in die Darstellungsmatrix gibt:

$$M_B^A(f) := \begin{pmatrix}-1 & 0\\-2 & -1\end{pmatrix}$$

die gesuchte Darstellungsmatrix.