① Mengen:

<u>Def.</u>: Eine „Menge" ist eine Zusammenstellung von verschiedenen „Dingen". (In der Mathematik: Zahlen).

Die „Dinge" in der Menge heißen „Elemente".

↳ <u>Notation</u>: $x \in M \iff$ „x ist Element von M". $(x \notin M \iff \neg(x \in M))$

$A \subseteq B \iff x \in A \Rightarrow x \in B$ $(A = B \iff A \subseteq B \wedge A \supseteq B)$.

„$\emptyset$" ist die leere Menge.

↳ <u>Bsp.</u>: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

↳ <u>Operationen</u>: (i) $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(ii) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

(iii) $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

(iv) $A \times B := \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

② Gruppen:

<u>Def.</u>: Ein geordnetes Paar $(G, \circ)$ aus einer Menge G und einer zweistelligen inneren Verknüpfung $\circ: G \times G \to G$ heißt „Gruppe" genau dann wenn gilt:

(i) $\forall a,b,c \in G: a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$. (Assoziativität)

(ii) $\exists e \in G\ \forall a \in G: e \circ a = a \circ e = a$ (Existenz eines neutralen Elements)

(iii) $\forall a \in G\ \exists a' \in G: a \circ a' = a' \circ a = e$. (Existenz eines inversen Elements)

* $(G, \circ)$ heißt „abelsch" falls außerdem gilt: (iv) $\forall a,b \in G: a \circ b = b \circ a$.

<u>Eigenschaften</u>: (i) e ist eindeutig

(ii) $\forall a \in G$: a' ist eindeutig.

(iii) $\forall a,b,c \in G: a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c$. (Kürzungsregel)

<u>Bsp.</u>: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}_+, \cdot)$; $(\mathbb{Z}_p, +_{mod})$.

↳ <u>Untergruppen</u>: Sei $U \subseteq G$. $(U, \circ)$ heißt „Untergruppe" von G, falls:

(i) $a, b \in U \Rightarrow a \circ b \in U$.

(ii) $a \in U \Rightarrow a' \in U$

$\Big\}$ (i) $\wedge$ (ii) $\Rightarrow e \in U$.

③ Ringe. $[M$ ist Menge $;\ +: M\times M \to M$ und $\cdot: M\times M \to M]$.

↳ Ein geordnetes Tripel $(M,+,\cdot)$ heißt „Ring", falls (i) $(M,+)$ ist abelsche Gruppe.

(ii) $\forall a,b,c \in M:\ a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$.

(iii) $\forall a,b,c\in M:\ a\cdot(b+c) = ab+ac$ und $(b+c)a = ba+ca$.

$(M,+,\cdot)$ heißt

- Nullteilerfrei: falls: $\forall a,b\in M:\ a\cdot b = 0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$.
- Kommutativ " : $\forall a,b\in M:\ a\circ b = b\circ a$.
- „mit Eins" " : $\exists e\in M\ \forall a\in M:\ a\cdot e = e\cdot a = a$.
- Divisionsring " : $\forall a\in M\ \exists \bar{a}^{-1}\in M:\ a\cdot\bar{a}^{-1} = \bar{a}^{-1}\cdot a = e$.

Bem: Ein „Ring" ist eine Struktur, die die ganzen Zahlen imitiert. $(M,+)$ soll eine Gruppe sein und (iii) macht $\cdot$ und $+$ miteinander „kompatibel".

④ Körper:

↳ Ein Körper ist ein Nullteilerfreier, kommutativer Divisionsring mit Eins. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $(M\setminus\{0\},\cdot)$ eine abelsche Gruppe bildet.

Notation: „0" ist das neutrale Element von $(M,+)$.
„1" ist das neutrale Element von $(M\setminus\{0\},\cdot)$ } Es gilt $0\neq 1$, da $0\notin M\setminus\{0\}$.
$\Rightarrow$ Ein Körper hat mind. 2 Elemente!

Bsp: $(\mathbb{R},+,\cdot)$; $(\mathbb{Q},+,\cdot)$; $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

Eigenschaften:

(i) $1\neq 0$

(ii) $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$

(iii) $a\cdot b = 0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$.

(iv) $a\cdot(-b) = -(a\cdot b) = (-a)\cdot b$

(v) $a\cdot b = a\cdot c \Rightarrow a=0 \vee b=c$.

⑤ Polynome:

↳ Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \{f \mid f:\mathbb{N}\to\mathbb{K}\}$ ist die Menge der Folgen in $\mathbb{K}$. und

$\mathbb{K}[x] := \{f\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid f(n)\neq 0$ nur für endlich viele $n\in\mathbb{N}\}$ ist die Menge der endlichen Folgen

* Jede Folge $f\in\mathbb{K}[x]$ definiert ein Polynom $\tilde{f}: x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ und $n = \max\{i\in\mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$

↳ die a_i heißen „Koeffizienten von $\tilde{f}$". Jedes Polynom ist eindeutig durch seine Koeffizienten bestimmt.

↳ Sei $f \in \mathbb{K}[x]$. Wir definieren $\deg(f) = \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$.

↳ Polynome lassen sich addieren und multiplizieren. Für $\tilde{f}, \tilde{g}: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ gilt:

$$\left.\begin{aligned}(\tilde{f}+\tilde{g})(x) &= \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)\\ (\tilde{f}\cdot\tilde{g})(x) &= \tilde{f}(x)\cdot\tilde{g}(x)\end{aligned}\right\} (*)$$

* Seien nun $f, g \in \mathbb{K}[x]$ die zu $\tilde{f}$ bzw. $\tilde{g}$ gehörigen Folgen von Koeffizienten:

$$\left.\begin{aligned}f &= (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)\\ g &= (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)\end{aligned}\right\}$$ um (*) zu reproduzieren, definieren wir:

I $(f+g) := (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)$ mit $c_i = a_i + b_i$

II $(f\cdot g) := (d_0, d_1, \dots, d_n, \dots)$ mit $d_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$.

⇒ auf diese Weise sind die zu $(f+g)$ bzw. $(f\cdot g)$ gehörigen Polynome gerade $(\tilde{f}+\tilde{g})$ bzw. $\tilde{f}\cdot\tilde{g}$.

! $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ mit $+$ wie in I und $\cdot$ wie in II definiert einen kommutativen Ring! !

Achtung: auf einem Ring kann man i.A. nicht dividieren. Stattdessen gilt:

Satz: Seien $p, q \in \mathbb{K}[x]$ mit $\deg(p) \geq \deg(q)$ und $q \neq 0$. Dann gibt es eindeutige $k, r \in \mathbb{K}[x]$, sodass (i) $p = k\cdot q + r$

(ii) $\deg(r) < \deg(q)$

Nullstellen von Polynomen: Sei $f \in \mathbb{K}[x]$. Falls $\tilde{f}(\lambda) = 0$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$, so heißt „λ Nullstelle von f".

↳ In diesem Fall existiert ein $g \in \mathbb{K}[x]$ s.d. $\tilde{f}(x) = (x-\lambda)\,\tilde{g}(x)$ und $\deg(f) = \deg(g)+1$.

Def: $r(\lambda) := \max\{r \in \mathbb{N} \mid \tilde{f}(x) = (x-\lambda)^r g(x)$ mit $g \in \mathbb{K}[x]\}$ heißt „Vielfachheit" von λ.

* Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann gilt:

Satz: Jedes $f \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(f) = n$ zerfällt in Linearfaktoren:

$$f(x) = \prod_i (x-\lambda_i)^{r_i} \quad \text{mit} \quad \sum_i r_i = \deg(f)$$

Wichtige Konsequenzen: (i) Falls $f \in \mathbb{R}[x]$, so treten komplexe Nullstellen immer paarweise auf. D.h.

$f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{\lambda}) = 0$.

(ii) Falls $f \in \mathbb{R}[x]$ und $\deg(f)$ ungerade, so hat f mind. eine reelle Nullstelle!