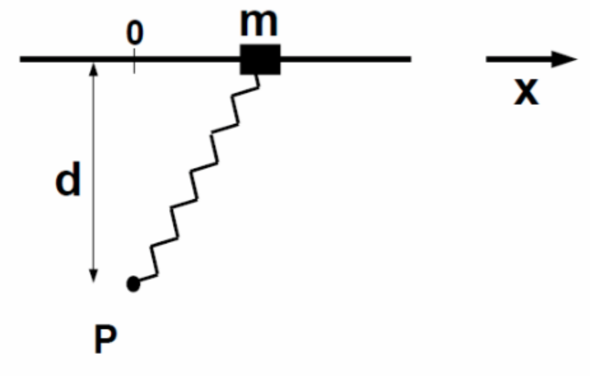
## Ferienkurs

# Theoretische Physik: Mechanik

### Probeklausur - Lösung

# 1 Schwingende Masse

Eine Masse $m$ (siehe Skizze) kann sich entlang einer horizontal aufgehängten, geraden Stange in $x$ - Richtung reibungsfrei bewegen. Diese Masse sei druch eine harmonische Feder mit dem festen Punkt $P$ verbunden. Die Federkonstante der Feder sei $k$, d. h. das Potential beträgt $\frac{k}{2}\cdot$ (Dehnung der Feder)$^2$. Die Entfernung des Punktes $P$ von der Stange sei $d$. Die Länge der Feder in entspanntem Zustand sei $l_0$.




1. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(\dot{x}, x)$ für die Masse $m$.
2. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Masse $m$ auf.

**Hinweis:** Ausder Lösung sieht man, dass es für bestimmte Werte von $x$ Gleichgewichtspositionen gibt, in denen keine Beschleunigung vorliegt. Diese ergeben sich allgemein aus der Bedingung $\frac{dV}{dx} = 0$, wobei es im Allgemeinen stabile $\frac{d^2V}{dx^2} > 0$ und instabile $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$ Gleichgewichtslagen gibt. Im konkreten Fall gibt es für $d < l_0$ zwei stabile und eine stabile Lösung, während es für $d \leq l_0$ nur eine stabile gibt, wie anschaulich klar ist.

## Lösung:

1. Die Lagrange-Funktion ergibt sich zu:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}(l - l_0)^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}(\sqrt{d^2 + x^2} - l_0)^2 \tag{1}$$

2. Die Bewegungsgleichung ergibt sich zu:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + k(\sqrt{d^2 + x^2} - l_0)\frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}} = 0 \tag{2}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right) = 0 \tag{3}$$

**Kommentar:** Für Lagen im Gleichgewicht gilt:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \tag{4}$$

Daraus bekommt man:

$$\frac{dV}{dx} = 0 = \frac{d}{dx}(\sqrt{d^2 + x^2} - l_0)^2 = 2x\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right) = 0 \tag{5}$$

$$d \geq l_0 : \quad x_{Glw} = 0 \tag{6}$$

$$d < l_0 : \quad x_{Glw} = 0 \quad , \quad x_{Glw} = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2} \tag{7}$$

Weiter gelten die Bedingungen:

$$\text{instabiles Gleichgewicht: } \frac{d^2V}{dx^2} < 0 \quad , \quad \text{stabiles Gleichgewicht: } \frac{d^2V}{dx^2} > 0 \tag{8}$$

Diese Bedingung bedeutet hier also:

$$\frac{d}{dx}x\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right) = \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}} + \frac{x^2 l_0}{(d^2 + x^2)^{3/2}}\right) \lesseqgtr 0 \tag{9}$$

Und weiter:

$$d \geq l_0 : \quad x_{Glw} = 0 \rightarrow \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}} + \frac{x^2 l_0}{(d^2 + x^2)^{3/2}}\right) = 1 - \frac{l_0}{d} \lesseqgtr 0 \tag{10}$$

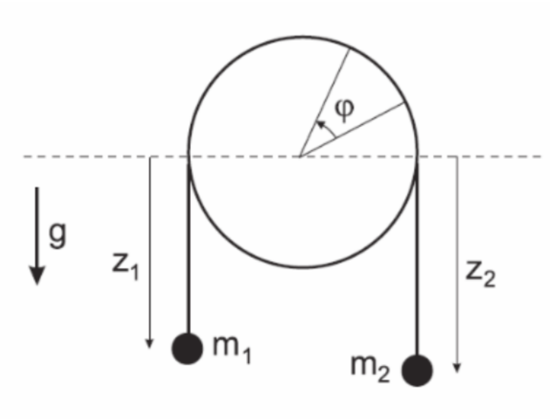
$$\begin{aligned} \Rightarrow d \geq l_0 : &\quad x_{Glw} = 0 \quad \text{stabiles Gleichgewicht,} \\ d < l_0 : &\quad x_{Glw} = 0 \quad \text{unstabiles Gleichgewicht} \end{aligned} \tag{11}$$

$$d < l_0 : \quad x_{Glw} = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2} \rightarrow \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{d^2 + x^2}} + \frac{x^2 l_0}{(d^2 + x^2)^{3/2}}\right) = l_0^2 - d^2 > 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow d < l_0 : \quad x_{Glw} = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2} \quad \text{stabiles Gleichgewicht} \tag{13}$$

## 2 Drehende Scheibe

Eine kreisförmige Scheibe mit Radius $R$, Gesamtmasse $M$ und Trägheitsmoment $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$ dreht sich um seine feste horizontale Symmetrieachse. Über die Scheibe läuft ohne Schlupf ein masseloses Seil der Länge $l$. An den Seilenden sind die Massen $m_1$ und $m_2$ befestigt (siehe Skizze). Das System steht unter dem Einfluss der Schwerkraft.




1. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L$ und wählen Sie dabei zunächst $z_1, z_2$ und $\varphi$ als generalisierte Koordinaten.
2. Eliminieren Sie aufgrund der Zwangsbedingungen die Variablen $z_2$ und $\varphi$. Achten Sie dabei auf die Vorzeichen.
3. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(z_1, \dot{z}_1)$ und daraus die Bewegunsgleichung und geben Sie ihre allgemeine Lösung an.

# Lösung:

1. Wir bekommen für kinetische und potentielle Energie und damit für die Lagrange-Funktion:

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{z}_2^2 + \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 \tag{14}$$

$$V = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2 \tag{15}$$

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{z}_2^2 + \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 + m_1 g z_1 + m_2 g z_2 \tag{16}$$

2. Die Zwangsbedingungen sind:

$$z_2 = l - z_1 \quad \text{(eigentlich l + const. - } z_1\text{)} \tag{17}$$

$$\dot{z}_1 = R\dot{\varphi} \tag{18}$$

3. und wir erhalten:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{\Theta}{R^2}\right)\dot{z}_1^2 + (m_1 - m_2) g z_1 + const. \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)\dot{z}_1^2 + (m_1 - m_2) g z_1 + const. \end{aligned} \tag{19}$$

Die Bewegungslgeichung ist daher:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)\ddot{z}_1 = (m_1 - m_2)g \tag{20}$$

$$\Rightarrow \ddot{z}_1 = \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2}\right)} = g_{eff} \tag{21}$$

was einfach dem freien Fall entspricht:

$$z_1(t) = z_1(0) + \dot{z}_1(0) + \frac{g_{eff}}{2}t^2 \tag{22}$$

# 3 Streuung

Betrachten Sie die Streuung eines Teilchens der Masse $m$ an einer harten, undurchdringbaren (dreidimensionalen) Kugel mit Radius $R$, die sich im Ursprung des Koordiantensystems befindet. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass das Teilchen aus dem Unendlichen mit Energie $E$ und Stoßparameter $b$ (bezogen auf den Mittelpunkt der Kugel) einläuft:

1. Geben Sie dsa Potential $U = U(r)$ sowie das effektive Potential $V = V(r)$ für das Problem an und skizzieren Sie beide.
2. Welche physikalischen Situationen entsprechen den Fällen $E > \frac{l^2}{2mR^2}$ und $0 < E < \frac{{}^2}{2mR^2}$, wobei $l$ der Betrag des Drehimpulses des Systems ist? Geben Sie für beide Fälle den Umkehrpunkt $r_0$ als Funktion der Energie $E$ und des Stoßparameters $b$ an.
3. Berechnen Sie für beide Fälle den Streuwinkel $\vartheta$ des Teilchens und erläutern Sie Ihr Ergebnis geometrisch.
4. Bestimmen Sie für den Fall, dass das Teilchen auf die Kugel stößt, sowohl differntiellen als auch totalen Wirkungsquerschnitt. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse!

# Lösung:

1. Da es sich bei der Kugel mit Radius $R$ um eine undurchdringbare Barriere handelt, lautet das Potential:

   Für $r > R$:

$$U(r) = 0 \tag{23}$$

   Für $r < R$:

$$U(r) = +\infty \tag{24}$$

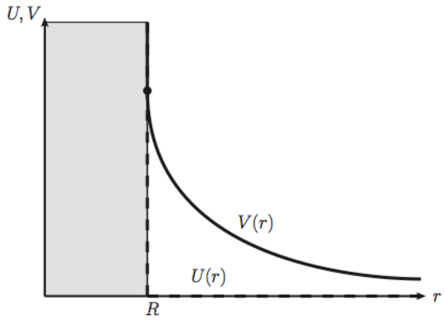
   Das effektive Potential $V = V(r)$ berücksichtigt noch den Beitrag $\frac{l^2}{2mr^2}$ des erhaltenen Drehimpulses $l$, also:

   Für $r > R$:

$$V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} \tag{25}$$

Für $r < R$:

$$V(r) = +\infty \tag{26}$$




Beide Potentiale sind in obenstehender Figur gezeichnet. Die Gesamtenergie des Systems ist:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) \tag{27}$$

2. Wir wenden uns nun dem Streuproblem zu. Offenbar gilt $E > 0$. Wegen $V(r) = \frac{l^2}{2mr^2}$ für $r > R$ hat das Teilchen im Unendlichen nur kinetische Energie, also:

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \tag{28}$$

wobei $v_\infty$ die Geschwindigkeit im Unendlichen ist. Da der Drehimpuls $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ im Zentralpotential erhalten ist, gilt für seinen Betrag $l = |\vec{L}| = mrvsin\varphi = mrsin\varphi v = mbv_\infty$, wobei $\varphi$ der von $\vec{r}$ un der Geschwindigkeit $\vec{v}$ eingeschlossene Winkel ist. Setzt man dies in den Ausdruck für die Energie ein, so ist:

$$E = \frac{l^2}{2mb^2} \tag{29}$$

Das heißt, der Fall (i) $E > \frac{l^2}{2mR^2}$ ergibt für den Stoßparameter $b$ die Bedingung $b < R$, der Fall (ii) $0 < E < \frac{l^2}{2mR^2}$ entsprechend $b > R$. Der erste Fall beschreibt demnach den Stoß an der Kugel, der zweite Fall die Streuung an der Kugel (ohne Zusammenprall mit der Kugel).
Im Fall (i) ist der Umkehrpunkt $r_0 = R$, wie man an der obigen Zeichnung sofort erkennt. Denn für $r > R$ ist $E > V(r)$, für $r < R$ ist $E < V(r) = +\infty$. Dies ist die Konsequenz aus der Undurchdringbarkeit der harten Kugel. Für den Fall des Stoßes an der harten Kugel ist demnach der Umkehrpunkt unabhängig von $E$ und $b$.
Im Fall (ii) erhält man $r_0$ aus der Bedingung $\dot{r} = 0$, also mit $l^2 = 2mEb^2$ $(U(r) = 0 für r > R)$:

$$r_0 = \sqrt{\frac{l^2}{2mE}} = b \tag{30}$$

Bewegt sich das Teilchen an der Kugel vorbei, dann entspricht der Umkehrpunkt gerade dem Stoßparameter $b$.

3. Der Streuwinkel $\vartheta$ ist gegeben durch $\vartheta = \pi - 2\alpha$ wobei $\alpha$ der Winkel ist, den das aus dem Unendlichen kommende Teilchen bis zum Umkehrpunkt $r_0$ durchläuft. Mit:

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(r)} \tag{31}$$

(das Minuszeichen rührt daher, dass das Teilchen aus $r \longrightarrow \infty$ kommt und $r$ entsprechend mit der Zeit abnimmt) und Drehimpulserhaltung $l = mr^2\dot{\varphi} = const.$ ergibt sich :

$$\alpha = \int_0^\alpha d\varphi = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}dr = -\sqrt{\frac{l^2}{2mE}}\int_\infty^{r_0} \frac{1}{r^2\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E}}}dr \tag{32}$$

Für den Fall (i) des Stoßes an der Kugel ist:

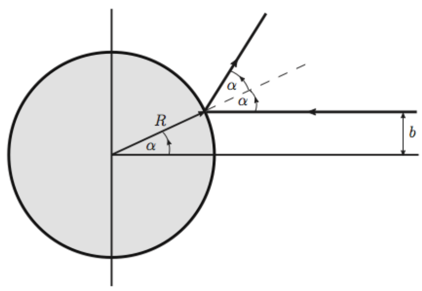
$$\alpha = -\sqrt{\frac{l^2}{2mE}}\int_\infty^{R} \frac{1}{r^2\sqrt{1 - \frac{l^2}{2mEr^2}}}dr = \sqrt{\frac{l^2}{2mE}}\int_0^{\frac{1}{R}} \frac{1}{r^2\sqrt{1 - \frac{l^2}{2mE}x^2}}dr = arcsin\left(\frac{b}{R}\right) \tag{33}$$

wobei $r = \frac{1}{x}$ und $dr = -\frac{1}{x^2}dx$ gilt.

Man beachte, dass bei $b < R$ tatsächlich $\frac{l^2}{2mER^2} < 1$ gilt. Der Streuwinkel ist dann:

$$\vartheta = \pi - 2\alpha = \pi - 2arcsin\left(\frac{b}{R}\right) \tag{34}$$

Um dieses Ergebnis geometrisch zu erklären, schreiben wir $sin\alpha = \frac{b}{R}$. Wie man aus folgender Zeichnung abliest, entspricht dies gerade dem Reflexionsgesetz an einer Kugeloberfläche: Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.




Für den Fall (ii), in dem das Teilchen die Kugel nicht berührt, ergibt sich mit $r_0 = b$:

$$\alpha = -\sqrt{\frac{l^2}{2mE}} \int_\infty^b \frac{1}{r^2\sqrt{1-\frac{l^2}{2mEr^2}}} dr = \sqrt{\frac{l^2}{2mE}} \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{1}{r^2\sqrt{1-\frac{l^2}{2mE}x^2}} dr = arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \tag{35}$$

wobei $r = \frac{1}{x}$ und $dr = -\frac{1}{x^2}dx$ gilt.
und damit der Streuwinkel:

$$\vartheta = \pi - 2\alpha = 0 \tag{36}$$

Wie erwartet wird das Teilchen von der Kugel dann gar nicht abgelenkt.

4. Um den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für den Fall (i) des Stoßes an der harten Kugel zu berechnen, verwenden wir folgende Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{sin\vartheta}\left|\frac{db}{d\vartheta}\right| \tag{37}$$

Gleichung (34) aufgelöst nach $b$ ergibt:

$$b(\vartheta) = Rsin\left(\frac{\pi-\vartheta}{2}\right) = Rcos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \tag{38}$$

Damit ist der differentielle Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{sin\vartheta}\left|\frac{db}{d\vartheta}\right| = \frac{R}{2sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}\frac{R}{2}sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{R^2}{4} \tag{39}$$

wobei wir die Doppelwinkelformel $sin(2x) = 2sinxcosx$ verwendet haben.
Daraus ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt:

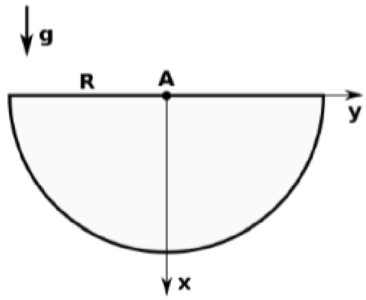
$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = 4\pi\frac{R^2}{4} = R^2\pi \tag{40}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt entspricht der Querschnittsfläche der Kugel, also derjenigen Fläche, die das Teilchen sieht, wenn es sich aus großer Entfernung auf die Kugel zubewegt.

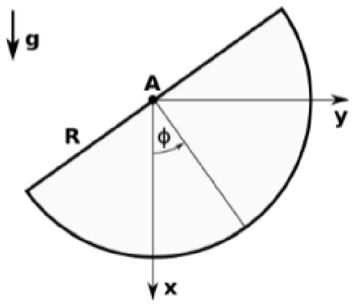
Bemerkung: Den totalen Wirkungsquerschnitt für den Stoß erhät man auch wegen $b_{max} = R$ aus $d\sigma = 2\pi bdb \Rightarrow \sigma = \pi b_{max}^2 = R^2\pi$.

# 4 Hängender Halbzylinder

Ein homogene Halbzylinder (Höhe $H$, Radius $R$, Gesamtmasse $M$) dreht sich im homogenen Schwerefeld um eine feste Achse $A$, die mit der Symmetrieachse des Zylinders zusammenfällt. Wir wählen den Punkt $A$ als Ursprung des Koordinatensystems. Der Halbzylinder erstreckt sich jeweils um $\frac{H}{2}$ in die Papierbene hinein bzw. aus der Papierebene heraus.




(a) Halbzylinder im Gleichgewicht




(b) Halbzylinder um die Achse A gedreht

1. Berechnen Sie den (körperfesten!) Schwerpunkt des Halbzylinders. Betrachten Sie dazu den Zylinder in der Gleichgewichtslage (Abb. a). Der Schwerpunkt ist allgemein definiert als:

$$\vec{S} = \frac{1}{M}\int \vec{x}\rho(\vec{x})d^3x \tag{41}$$

Warum ist nur seine $x$ - Komponente ungleich Null? Was ist $\rho$ in dem Fall?

2. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment $\Theta_{zz} = \Theta_A$ für Drehungen um die Achse $A$.

3. Betrachten Sie die Drehung des Zylinders um die $A$ Achse (Abb. b). Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion un die Bewegungslgeichungen. Mit welcher Frequenz pendelt der Halbzylinder,wenn der Winkel $\phi \ll 1$ (d. h. $sin\phi \approx \phi$) ist?

# Lösung:

1. Die Massendichte ergibt sich aus:

$$\rho = \frac{2M}{\pi R^2 H} \tag{42}$$

Die Schwerpunktskoordinaten sind dann:

$$x_S = \frac{1}{M}\int x\rho dxdydz = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^\pi\int_0^R rsin\phi rdrd\phi = \frac{2}{\pi^2}2\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3\pi}R \tag{43}$$

$$y_S = \frac{1}{M}\int y\rho dxdydz = 0 \quad \text{(Symmetrie um Ursprung)} \tag{44}$$

$$z_S = \frac{1}{M}\int z\rho dxdydz = 0 \quad \text{(Symmetrie um Ursprung)} \tag{45}$$

2. Die Komponente des Trägheitstensors $\Theta_{zz} = \Theta_A$ ist:

$$\Theta_A = \int \rho(x^2 + y^2)dxdydz = \rho l \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi d\varphi = \frac{2M}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}\pi = \frac{M}{2}R^2 \tag{46}$$

3. Es folgt:

$$T = \frac{\Theta}{2}\omega^2 = \frac{\Theta_A}{2}\dot{\phi}^2 \tag{47}$$

$$V = -Mgx_S cos\phi \tag{48}$$

$$L = T - V = \frac{\Theta_A}{2}\dot{\phi}^2 + Mg\frac{4R}{3\pi}cos\phi \tag{49}$$

Es folgen die Lagrangegleichungen und die Frequenz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta_A\ddot{\phi} + Mg\frac{4R}{3\pi}sin\phi = 0 \tag{50}$$

$$\ddot{\phi} = -Mg\frac{4R}{3\pi}\frac{2}{MR^2}sin\phi = -\frac{8g}{3\pi R}sin\phi \tag{51}$$

$$sin\phi \approx \phi \quad \to \quad \ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{8g}{3\pi R}} \tag{52}$$