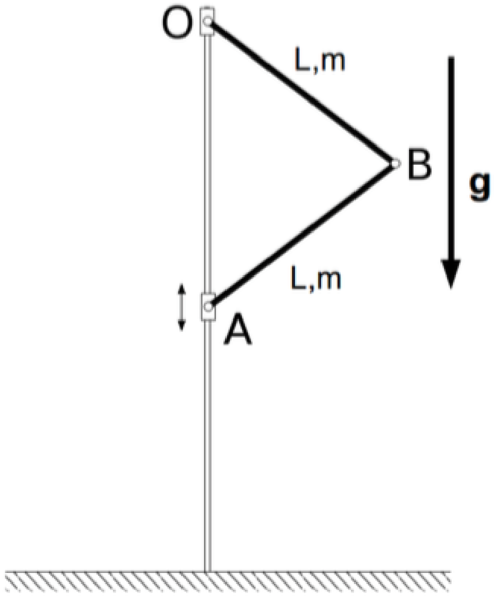
Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 4 - Lösung

1 Zwei über ein Scharnier verbundene Stäbchen baumeln herum

Zwei knickbar verbundene Stangen, jeweils der Masse m und der Länge L sind über Schlitten mit einer fixierten dünnen vertikale Stange verbunden. Der obere Schlitten ist fixiert. Der untere Schlitten hat eine vernachlässigbare Masse und kann sich reibungsfrei entlang der dünnen vertikalen Stange bewegen. Die gesamte Bewegung der Stangen findet nur in der Abbildungsebene statt (Die beweglichen Stangen können jedoch an der vertikalen Stange vorbei schwingen).



1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems aus (mit der Koordinate ϕ als Winkel zwischen der unteren Stange und der vertikal fixierten Stange).
   Anmerkung: Denken Sie beim Aufstellen der kinetischen Energie daran, dass die Rotations- und Translationsbewegung der Stange AB nur dann getrennt voneinander betrachtet werden können, wenn der betrachtete Trägheitspunkt gleich dem Massenschwerpunkt der Stange ist.

2. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen.

3. Finden Sie die Frequenzen von kleinen Oszillationen (ϕ sehr klein) des Systems um die Gleichgewichtslage.

Lösung:

1. potentielle Energie: $V_{cm} = -2mglcos\varphi$
   kinetische Energien:
   Stange OB - Rotation um $\vec{e}_z$ mit Drehpunkt O: $T_{OB} = \frac{1}{2}\Theta_{zz}\omega^2$, $\Theta_{zz} = \frac{1}{3}ml^2$, $\omega^2 = \dot{\varphi}^2$

$$T_{OB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{1}{3}\right)\dot{\varphi}^2 \tag{1}$$

Stange AB - Rotation um $\vec{e}_z$ mit Drehpunkt im Massenschwerpunkt der Stange AB + Translation des Massenschwerpunktes:

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m\vec{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2}(\Theta_{zz})_{cm}\omega^2 \quad , \quad \Theta_{zz} = \frac{1}{12}ml^2 \quad , \quad \omega^2 = \dot{\varphi}^2 \tag{2}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{l}{2}\dot{\varphi}cos\varphi\vec{e}_y - \frac{3l}{2}\dot{\varphi}sin\varphi\vec{e}_z \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{cm} = \dot{\varphi}^2l^2\left\{\frac{1}{4}cos^2\varphi + \frac{9}{4}sin^2\varphi\right\} = \dot{\varphi}^2\left(\frac{l}{2}\right)^2\{1+8sin^2\varphi\} \tag{3}$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2\{1+8sin^2\varphi\} + \frac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\left[\frac{1}{3} + 2sin^2\varphi\right] \tag{4}$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\left[\frac{2}{3} + 2sin^2\varphi\right] + 2mglcos\varphi \tag{5}$$

2.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{ml^2\dot{\varphi}^2\left[\frac{2}{3} + 2sin^2\varphi\right]\right\} - ml^2\dot{\varphi}^2 2sin\varphi cos\varphi + 2mglsin\varphi = 0 \tag{7}$$

$$ml^2\ddot{\varphi}\left[\frac{2}{3} + 2sin^2\varphi^2\right] + 4ml^2\dot{\varphi}^2 sin\varphi cos\varphi - ml^2\dot{\varphi}^2 2sin\varphi cos\varphi + 2mglsin\varphi = 0 \tag{8}$$

$$\ddot{\varphi}\left[\frac{2}{3} + 2sin^2\varphi^2\right] + 2\dot{\varphi}^2 sin\varphi cos\varphi + \frac{2g}{l}sin\varphi = 0 \tag{9}$$

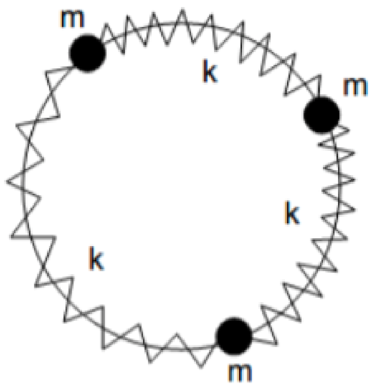
3. Linearisierung für kleine Oszillationen: $sin\varphi \approx \varphi$, vernachlässige nicht-lineare Terme:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3g}{l}\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \tag{10}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} \tag{11}$$

2 Flotter Dreier

Drei gleiche Massen m sind über identische harmonische Federn (masselos) der Federkonstante k miteinander verbunden (siehe Abbildung). Die Massen können entlang dem Kreis in der Abbildung reibungsfrei rutschen.



1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion für die drei Massen auf.
   Hinweis: Benutzen Sie als Koordinaten die Auslenkungen aus den jeweiligen Gleichgewichtslagen $s_i = R\varphi \quad , \quad i = 1, 2, 3.$

2. Finden Sie die Eigenfrequenzen und entsprechenden Eigenvektoren des Systems.
   Hinweis: Stellen Sie die Lagrange-Funktion in der Form $L = \frac{1}{2}\langle\, \dot{\vec{s}}, \hat{M}\dot{\vec{s}}\,\rangle - \frac{1}{2}\langle\, \vec{s}, \hat{K}\vec{s}\,\rangle$ dar. Nun bilden Sie die Matrix $\Gamma = \hat{M}^{-1}\hat{K}$ und finden deren Eigenwerte ω.

Lösung:

1. Abweichung von den Gleichgewichtspositionen: $s_i = R\varphi \quad , \quad i = 1, 2, 3$

   Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2 + \dot{s}_3^2) \tag{12}$$

   Potentielle Energie:

$$V = \frac{1}{2}k[(s_2 - s_1)^2 + (s_3 - s_2)^2 + (s_1 - s_3)^2] \tag{13}$$

   Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\langle\, \dot{\vec{s}}, \hat{M}\dot{\vec{s}}\,\rangle - \frac{1}{2}\langle\, \vec{s}, \hat{K}\vec{s}\,\rangle \tag{14}$$

2.

$$\Gamma = \hat{M}^{-1}\hat{K} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$det(\hat{\Gamma} - \omega^2 1) = 0 = det\left(\frac{m}{k}\hat{\Gamma} - \frac{m\omega^2}{k}1\right) = det(\hat{A} - \lambda 1) = 0 \tag{16}$$

$$det(\hat{A} - \lambda 1) = (2-\lambda)^3 - 1 - 1 - 3(2-\lambda) = -\lambda(\lambda - 3)^2 = 0 \tag{17}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 3 \tag{18}$$

Eigenfrequenzen:

$$\omega_1^2 = 0 \quad , \quad \omega_2^2 = \omega_3^2 = \frac{3k}{m} \tag{19}$$

Eigenvektoren:

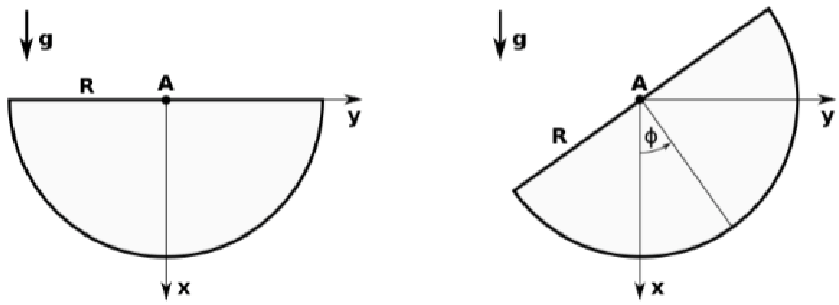
$$\omega_1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\omega_1^2 = 3 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\omega_1^2 = 3 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

3 Hängender Halbzylinder

Ein homogene Halbzylinder (Höhe H, Radius R, Gesamtmasse M) dreht sich im homogenen Schwerefeld um eine feste Achse A, die mit der Symmetrieachse des Zylinders zusammenfällt. Wir wählen den Punkt A als Ursprung des Koordinatensystems. Der Halbzylinder erstreckt sich jeweils um $\frac{H}{2}$ in die Papierbene hinein bzw. aus der Papierebene heraus.



(a) Halbzylinder im Gleichgewicht (b) Halbzylinder um die Achse A gedreht

1. Berechnen Sie den (körperfesten!) Schwerpunkt des Halbzylinders. Betrachten Sie dazu den Zylinder in der Gleichgewichtslage (Abb. a). Der Schwerpunkt ist allgemein definiert als:

$$\vec{S} = \frac{1}{M}\int \vec{x}\rho(\vec{x})d^3x \tag{23}$$

   Warum ist nur seine x - Komponente ungleich Null? Was ist ρ in dem Fall?

2. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment $\Theta_{zz} = \Theta_A$ für Drehungen um die Achse A.

3. Betrachten Sie die Drehung des Zylinders um die A Achse (Abb. b). Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion un die Bewegungslgeichungen. Mit welcher Frequenz pendelt der Halbzylinder,wenn der Winkel $\phi \ll 1$ (d. h. $sin\phi \approx \phi$) ist?

Lösung:

1. Die Massendichte ergibt sich aus:

$$\rho = \frac{2M}{\pi R^2 H} \tag{24}$$

   Die Schwerpunktskoordinaten sind dann:

$$x_S = \frac{1}{M}\int x\rho dxdydz = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^{\pi}\int_0^{R} rsin\phi rdrd\phi = \frac{2}{\pi^2}2\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3\pi}R \tag{25}$$

$$y_S = \frac{1}{M}\int y\rho dxdydz = 0 \quad \text{(Symmetrie um Ursprung)} \tag{26}$$

$$z_S = \frac{1}{M}\int z\rho dxdydz = 0 \quad \text{(Symmetrie um Ursprung)} \tag{27}$$

2. Die Komponente des Trägheitstensors $\Theta_{zz} = \Theta_A$ ist:

$$\Theta_A = \int \rho(x^2 + y^2)dxdydz = \rho l \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi d\varphi = \frac{2M}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}\pi = \frac{M}{2}R^2 \tag{28}$$

3. Es folgt:

$$T = \frac{\Theta}{2}\omega^2 = \frac{\Theta_A}{2}\dot{\phi}^2 \tag{29}$$

$$V = -Mgx_S cos\phi \tag{30}$$

$$L = T - V = \frac{\Theta_A}{2}\dot{\phi}^2 + Mg\frac{4R}{3\pi}cos\phi \tag{31}$$

Es folgen die Lagrangegleichungen und die Frequenz:

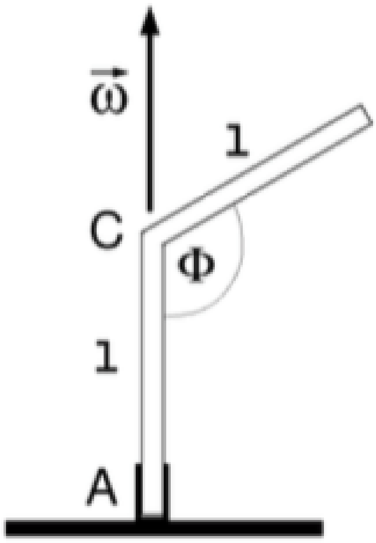
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta_A\ddot{\phi} + Mg\frac{4R}{3\pi}sin\phi = 0 \tag{32}$$

$$\ddot{\phi} = -Mg\frac{4R}{3\pi}\frac{2}{MR^2}sin\phi = -\frac{8g}{3\pi R}sin\phi \tag{33}$$

$$sin\phi \approx \phi \quad \rightarrow \quad \ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{8g}{3\pi R}} \tag{34}$$

4 Rotierender, gewinkelter Stab

Ein dünner homogener Stab der Länge $2l$ und der Gesamtmasse m ist bei seiner Mitte C um einen Winkel $\Phi = \frac{3\pi}{4}$ abgewinkelt. Der Stab drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um die vertikale Achse. Ein Ende des Stabes ist in einem Lager befestigt (A). Man nehme an, dass sich der Drehimpuls im Ursprung des Koordinatensystems befinde und dass $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$. Wählen Sie die $\vec{e}_y$ - Achse so, dass sich der Stab im körperfesten System komplett in der $(\vec{e}_y, \vec{e}_z)$ Ebene befindet.



1. Bestimmen Sie die folgenden drei Komponenten des Trägheitstensors Θ_{xz}, Θ_{yz} und Θ_{zz}. Führen Sie dazu folgende Parametrisierung ein:

$$z = lt, x = y = 0 \quad \text{unterhalb von C}, \quad z = lt, x = 0, x = l(t-1) \quad \text{oberhalb von C} \tag{35}$$

$$t \in [0, 1[\quad \text{unterhalb von C}, \quad t \in \left[1, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\quad \text{oberhalb von C} \tag{36}$$

   benutzen Sie dann Wegintegrale um die Komponenten zu berechnen.

2. Auf den Stab wirkt ein Drehmoment $\vec{N}$ relativ zu dem Lager A. Bestimmen Sie dies als eine Funktion der Θ_{ij}. Benutzen Sie dazu die Vektoridentität $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ zum Vereinfachen der Rechnung. Sie müssen keine konkreten Werte für die Θ_{ij} einsetzen.

3. Bestimmen Sie das Drehmoment welches auf das Lager A wirkt. Benutzen Sie dazu die vektorielle Form der Eulergleichung und transformieren Sie nicht in das System der Hauptachsen. Sie können die Aufgabe lösen ohne den Trägheitstensor explizit aufgeben.

Lösung:

1. Allgemein gilt:

$$\Theta_{ij} = \int\limits_{Koerper} (\delta_{ij}\vec{r}^2 - x_i x_j)dm = \int\limits_{Stab} (\delta_{ij}\vec{r}^2 - x_i x_j)\rho(\vec{r})ds \tag{37}$$

Massenverteilung:

$$\rho(\vec{r})ds = \frac{m}{2l}ds \quad , \quad ds \text{ist ein Längenelement des Stabes} \tag{38}$$

Mit der gegebenen Parametrisierung ergibt sich für das Längenelement:

$$ds = ldt \quad \text{unterhalb von C,} \quad ds = \sqrt{2}ldt, \quad \text{oberhalb von C} \tag{39}$$

Integrieren nach t ergibt:

$$\Theta_{zz} = \sqrt{2}\frac{m}{2}\int\limits_{1}^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} dtl^2(t-1)^2 = \sqrt{2}\frac{ml^2}{2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dtt^2 = \frac{ml^2}{12} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{yz} = \Theta_{zy} &= -\sqrt{2}\frac{m}{2}\int\limits_{1}^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} dtl^2(t-1)t = -\sqrt{2}\frac{ml^2}{2}[\frac{1}{3}t^3 - \frac{t^2}{2}]_1^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \\ &= -\sqrt{2}\frac{m}{2}[(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}) - \frac{3}{2}(\sqrt{2} + \frac{1}{2})] = -\frac{ml^2}{24}[2 + 3\sqrt{2}]\end{aligned} \tag{41}$$

$$\Theta_{xz} = \Theta_{zx} = 0 \tag{42}$$

2. Für das Drehmoment gilt:

$$\vec{N} = \int \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r})d^3r \tag{43}$$

und für die Dichte der Zentripetalkraft erhält man:

$$F(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \rho(\vec{r})(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - \rho(\vec{r})\omega^2\vec{r} \tag{44}$$

Durch Einsetzen folgt:

$$\vec{N} = \int \rho(\vec{r})(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} \times \vec{\omega}d^3r \tag{45}$$

Mit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ ergibt sich:

$$\vec{N} = \omega^2 \int \rho(\vec{r})z\vec{r} \times \vec{e}_z d^3r = \begin{pmatrix} \omega\int\rho(\vec{r})zyd^3r \\ -\omega\int\rho(\vec{r})zxd^3r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2\Theta_{yz} \\ \omega^2\Theta_{xz} \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2\Theta_{yz}\vec{e}_x \tag{46}$$

3. Der Drehpunkt des Stabes befindet sich in A, das heißt der Drehpunkt ist im IS in Ruhe $\Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega}$:

$$\vec{M} = \frac{d\overrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega}}{dt}|_{IS} = \frac{d\overrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega}}{dt}|_{KS} + \vec{\omega}\overrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega} \tag{47}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega}}{dt}|_{KS} = 0 \quad \text{da} \quad \frac{d}{dt}\vec{\omega} = 0 \rightarrow \vec{M} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega} \tag{48}$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Theta_{xz}\omega \\ \Theta_{yz}\omega \\ \Theta_{zz}\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Theta_{yz}\omega^2 \\ \Theta_{xz}\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega^2 \frac{ml^2}{24}[2 + 3\sqrt{2}] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

5 Rollender Zylinder in Zylinder

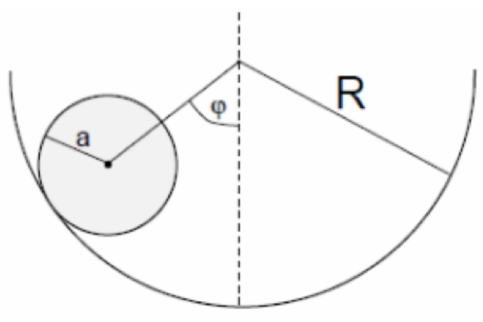
Ein homogener Zylinder (Gesamtmasse M, Radius a, Trägheitsmoment bezüglich seiner Symmetrieachse $\Theta_{zz} = \frac{Ma^2}{2}$) rollt ohne Schlupf unter dem Einfluss der Gravitation auf der Innenseite eines festen Zylinders. Der innere Radius dieses festen Zylinders ist R.

1. Beweisen Sie, dass die folgende Rollbedingung für die Winkelgeschwindigkeit des rollenden Zylinders gilt:

$$\omega_z = \dot{\varphi}\frac{R - a}{a} \tag{50}$$

   Dabei ist φ der Winkel zwischen der festen vertikalen Achse und der Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der beiden Zylinder.

2. Benutzen Sie die Rollbedingung, um die kinetische Energie des rollenden Zylinders als Funktion von $\dot{\varphi}$ zu bestimmen. Geben Sie die Lagrangefunktion des Zylinders an.
   Hilfe: Bestimmen Sie zuerst die Bahngeschwindigkeit v_S des Schwerpunkts des rollenden Zylinders als Funktion von $\dot{\varphi}$. Überlegen Sie dann mittels der Rollbedingung den Zusammenhang zwischen v_S und der Winkelgeschwindigkeit ω_z der Drehung des rollenden Zylinders um seinen Schwerpunkt. Beachten Sie, dass die gesamte kinetische Energie die Summe aus Schwerpunkts- und Rotationsbewegung um den Schwerpunkt ist.



Lösung:

1. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit beträgt $v_S = \dot{\varphi}(R - a)$. Betrachten wir die Bewegung vom Schwerpunkt um die Achse, die durch den Auflagepunkt verläuft und senkrecht auf der Ebene steht. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist durch folgende Relation gegeben:

$$v_S = \omega \cdot a \tag{51}$$

   Da die beiden Schwerpunktsgeschwindigkeiten offensichtlich gleich sein müssen, ergibt sich die Rollbedingung:

$$\omega = \dot{\varphi}\frac{R - a}{a} \tag{52}$$

2. Die Winkelgeschwindigkeit ω_z ergibt sich aus der Rollbedingung:

$$\omega_z = \dot{\varphi}\frac{R - a}{a} \tag{53}$$

   Kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung:

$$T_S = \frac{1}{2}Mv_s^2 \tag{54}$$

   Kinetische Energie der Rotationsbewegung:

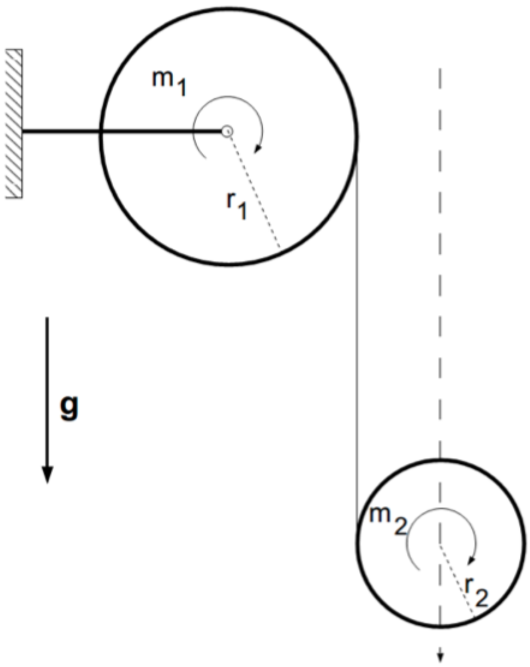
$$T_{Rotation} = \frac{1}{2}\Theta_{zz}\omega_z^2 \tag{55}$$

$$T = T_S + T_{Rotation} = \frac{1}{2}Mv_s^2 + \frac{1}{2}\Theta_{zz}\omega_z^2 \tag{56}$$

$$T = \frac{M}{2}(R - a)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}a^2\dot{\varphi}^2\frac{(R - a)^2}{a^2} = \frac{3M}{4}(R - a)^2\dot{\varphi}^2 \tag{57}$$

6 Verspulte Scheibchen

Zwei homogene Scheiben der Massen m_1, m_2 und Radien r_1, r_2 sind von einem masselosen Faden umwickelt. Scheibe 1 kann um ihre Symmetrieachse rotieren und ist ansonsten fixiert. Während Scheibe 2 herunter fällt, wickelt sich der Faden ab. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen und die Kraft, welche entlang dem Faden wirkt. Überlegen Sie sich vorher, wie beim Abrollen die Winkel φ_1 und φ_2 - welche die Rotation der Scheiben beschreiben - mit der Position x_2 von m_2 zusammenhängen.



Lösung:

Bewegungsgleichungen - Drehmoment:

Scheibe 1:

$$I_1\ddot{\varphi}_1 = \frac{m_1}{2}r_1^2\ddot{\varphi}_1 = r_1 F \tag{58}$$

Scheibe 2:

$$I_2\ddot{\varphi}_2 = \frac{m_2}{2}r_2^2\ddot{\varphi}_2 = r_2 F \tag{59}$$

Bewegungsgleichung - Kraft auf Massenschwerpunkt x_2 :

$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - F \tag{60}$$

Zwangsbedingung:

$$x_2 = r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2 \rightarrow \ddot{x}_2 = r_1\ddot{\varphi}_1 + r_2\ddot{\varphi}_2 \tag{61}$$

$$\longrightarrow m_2(r_1\ddot{\varphi}_1 + r_2\ddot{\varphi}_2) = m_s g - F \tag{62}$$

$$\longrightarrow \ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_1\frac{m_1}{m_2}\frac{r_1}{r_2} \tag{63}$$

$$(m_2 r_1 \ddot{\varphi}_1 + m_1 r_1 \ddot{\varphi}_1) = m_2 g - F \tag{64}$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{2F}{m_1 r_1} \tag{65}$$

$$2F\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) = m_2 g - F \quad \longrightarrow \quad 2F\left(\frac{2m_2 + 3m_1}{2m_1}\right) = g m_2 \tag{66}$$

$$F = g\frac{m_1 m_2}{3m_1 + 2m_2} \tag{67}$$