Ferienkurs

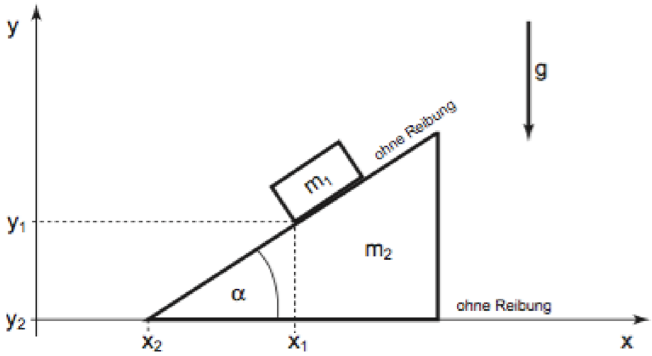
Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 3 - Lösung

PHYSIK
DEPARTMENT

1 Gleiten und Zwangsbedingungen

Wir betrachten einen Block der Masse m_1 auf einem Keil der Masse m_2. Der Keil gleitet nur auf der horizontalen Ebene, während der Block auf dem Keil gleitet. Die Bewegung ist zur Gänze auf die $x - y$ - Ebene beschränkt (siehe Abbildung). Betrachten Sie nur die Bewegung, solange sich der Block auf dem Keil befindet. Die beiden Bewegungen verlaufen ohne Reibung. Das System befinde sich in einem homogenen Schwerefeld.



1. Formulieren Sie die geometrischen Zwangsbedingungen.
2. Konstruieren Sie die Ausdrücke für die Zwangskräfte, die zunächst unbekannte Lagrangeparameter enthalten. Wieviele sind das?
3. Nun führen wir neue Koordinaten s_1 und s_2 ein, die alle Zwangsbedingungen beinhalten:

$$x_2 = s_2 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad x_1 = s_2 + s_1 cos\alpha \quad , \quad y_1 = s_1 sin\alpha \tag{1}$$

   Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion als Funktion von s_1 und s_2 und geben Sie die resultierenden Bewegungsgleichungen an.
4. Bestimmen Sie wenigstens eine Erhaltungsgröße für die Lagrange-Funktion aus Teilaufgabe 3.

   Hinweis: Es gibt insgesamt 2 Erhaltungsgrößen

Lösung:

1. Für eine Bewegung in der $x - y$ - Ebene gilt:

$$z_1 = 0 \quad , z_2 = 0 \tag{2}$$

   Für eine Bewegung des Keils nur in x - Richtung gilt:

$$g_1(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = y_2 - const. = 0 \tag{3}$$

Da der Block stets auf dem Keil ist, gilt:

$$g_2'(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = y_1 - y_2 - (x_1 - x_2)tan\alpha = 0 \tag{4}$$

$$\Rightarrow g_2(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = x_1 sin\alpha - y_1 cos\alpha - x_2 sin\alpha + y_2 cos\alpha = 0 \tag{5}$$

2. Die Zwangskräfte:

$$\vec{F}_i = \sum_{l=1}^{2} \lambda_l(t)\vec{\nabla}_i g_l(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) \quad , \quad i = 1, 2 \tag{6}$$

$$\vec{\nabla}_i g_l = \left(\frac{\partial g_l}{\partial x_i}, \frac{\partial g_l}{\partial y_i}\right) \tag{7}$$

$$\vec{\nabla}_1 g_1 = (0, 0) \quad , \quad \vec{\nabla}_2 g_1 = (0, 1) \tag{8}$$

$$\vec{\nabla}_1 g_2(sin\alpha, -cos\alpha) \quad , \quad \vec{\nabla}_2 g_2 = (-sin\alpha, cos\alpha) \tag{9}$$

$$F_{1x} = \lambda sin\alpha \quad , \quad F_{1y} = -\lambda_2 cos\alpha \quad , \quad F_{2x} = -\lambda_2 sin\alpha \quad , \quad F_{2y} = \lambda_1 + \lambda_2 cos\alpha \tag{10}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_1}{2}(\dot{s}_2 + \dot{s}_1 cos\alpha)^2 + \frac{m_1}{2}\dot{s}_1^2 sin^2\alpha + \frac{m_2}{2}\dot{s}_2^2 = \\ &= \frac{m_1}{2}(\dot{s}_2^2 + \dot{s}_1^2) + \frac{m_2}{2}\dot{s}_2^2 + m_1\dot{s}_1\dot{s}_2^2 cos\alpha \end{aligned} \tag{11}$$

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = m_1 g s_1 sin\alpha \tag{12}$$

$$L = T - V = \frac{m_1}{2}(\dot{s}_2^2 + \dot{s}_1^2) + \frac{m_2}{2}\dot{s}_2^2 + m_1\dot{s}_1\dot{s}_2 cos\alpha - m_1 g s_1 sin\alpha \tag{13}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_1} - \frac{\partial L}{\partial s_1} = m_1\ddot{s}_1 + m_1\ddot{s}_2 cos\alpha + m_2 g sin\alpha = 0 \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_2} - \frac{\partial L}{\partial s_2} = m_1\ddot{s}_2 + m_2\ddot{s}_2 + m_1\ddot{s}_1 cos\alpha = 0 \tag{15}$$

3. Es wirken keine dissipativen Kräfte $\Rightarrow$ Energie ist erhalten:

$$E = T + V = \frac{m_1}{2}(\dot{s}_2^2 + \dot{s}_1^2) + \frac{m_2}{2}\dot{s}_2^2 + m_1\dot{s}_1\dot{s}_2 cos\alpha + m_1 g s_1 sin\alpha = const. \tag{16}$$

Die Lagrange-Funktion hängt nicht von der Koordinate s_2 ab:

$$\frac{\partial L}{\partial s_2} = 0 \tag{17}$$

Solche Koordinaten nennt man zyklische Koordinaten. Dann ist der zu s_2 konjugierte Impuls eine Erhaltungsgröße:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_2} = (m_1 + m_2)\dot{s}_2 + m_1\dot{s}_1 cos\alpha = const. \tag{18}$$

2 Zeitabhängige Lagrange-Funktion und geschwindigkeitsabhängige Kräfte

Betrachten Sie zuerst die zeitabhängige Lagrange-Funktion:

$$L_1 = e^{\gamma t}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right) \quad , \quad \gamma > 0 \tag{19}$$

1. Bestimmen Sie den kanonischen Impuls. Ist die Koordinate q zyklisch?
2. Bestimmen und lösen Sie die Bewegungsgleichung.
3. Betrachten Sie im Folgenden die Lagrange-Funktion:

   $$L_2 = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2 \tag{20}$$

   zusammen mit der dissipativen Funktion:

   $$F = \frac{m}{2}\gamma\dot{q}^2 \tag{21}$$

   Bestimmen Sie den kanonischen Impuls. Ist die Koordinate q zyklisch?
4. Bestimmen und lösen Sie die Bewegungsgleichung. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem von Teilaufgabe 2.

Lösung:

1. Die kanonischen Impulse für die erste Lagrange-Funktion lauten:

   $$p = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}} = me^{\gamma t}\dot{q} \tag{22}$$

   Die Koordinate q ist nicht zyklisch.

2. Für die Bewegungsgleichung erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L_1}{\partial q} = me^{\gamma t}\ddot{q}m\gamma e^{\gamma t}\dot{q} + ke^{\gamma t}q = 0 \tag{23}$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \gamma\dot{q} + \frac{k}{m}q = 0 \tag{24}$$

Das beschreibt einen gedämpften harmonischen Oszillator. Wir verwenden den Ansatz:

$$q(t) = Aexp\omega t \tag{25}$$

woraus die folgende charakteristische Gleichung folgt:

$$\omega^2 + \gamma\omega + \frac{k}{m} = 0 \tag{26}$$

Diese Gleichung hat abhängig von γ eine oder zwei Lösungen:

$$\omega_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}} \quad , \quad \gamma > \sqrt{\frac{4k}{m}} \tag{27}$$

$$\omega_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4}} \quad , \quad \gamma > \sqrt{\frac{4k}{m}} \tag{28}$$

$$\omega = -\frac{\gamma}{2} \quad , \quad \gamma = \sqrt{\frac{4k}{m}} \tag{29}$$

woraus wir die folgenden Lösungen erhalten:

$$q(t) = A_1 exp\omega_1 t + A_2 exp\omega_2 t \quad , \quad \gamma \neq \sqrt{\frac{4k}{m}} \tag{30}$$

$$q(t) = (A + Bt)exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \quad , \quad \gamma = \sqrt{\frac{4k}{m}} \tag{31}$$

3. Die kanonischen Impulse für die zweite Lagrange-Funktion lauten:

$$p = \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \tag{32}$$

Die Koordinate q ist nicht zyklisch.

4. Die Euler-Lagrange-Gleichungen mit dem dissipativen Term lauten:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L_2}{\partial q} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \tag{33}$$

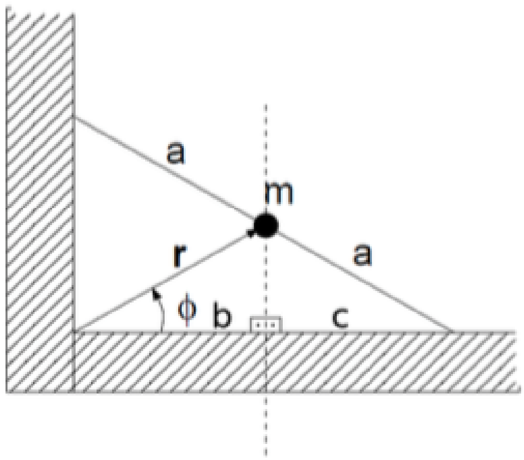
oder:

$$m\ddot{q} + kq = -m\gamma\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} + \gamma\dot{q} + \frac{k}{m}q = 0 \tag{34}$$

Diese Bewegungsgleichung und deren Lösungen sind mit der von 2. identisch. Das Beispiel zeigt, dass zeitabhängige Lagrange-Funktionen genutzt werden können um Dissipation zu beschreiben.

3 Stange gleitet Wand hinab

Eine Masse m sei genau in der Mitte einer masselosen Stange der Länge $2a$ fest angebracht. Dieses Gebilde lehne reibungsfrei an einer Wand und gleite wegen der Gravitationskraft, die auf m wirkt an ihr hinab. Die Stange bleibt zu jeder Zeit mit der Wand in Berührung.



1. Formulieren Sie die geometrische Zwangsbedingung für die Bewegung der Masse m und konstruieren SIe einen formalen Ausdruck für die Zwangskraft.
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Masse m als Funktion ihrer Position (z. B. φ.)
3. Berechnen Sie die Zwangskraft konkret und interpretieren Sie die auftretenden Terme.

Hilfe: Drücken Sie die Zwangsbedingung $f = 0$ in Polarkoordinaten aus. Verwenden Sie die erste und zweite zeitliche Ableitung der Zwangsbedingung zur Bestimmung der Zwangskraft.

Lösung:

1. Die Bewegung der Masse m ist beschränkt auf den Bereich:

$$y = rsin\varphi \quad , \quad x = rcos\varphi \tag{35}$$

mit $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Weiterhin lässt sich aus dem Strahlensatz:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{c} \tag{36}$$

sehen, dass $b = c$ und über den rechten Winkel $r = a$ sein muss. Somit lässt sich die Zwangsbedingung schreiben als:

$$f(r, \varphi) = r - a = 0 \tag{37}$$

Wir machen einen Ansatz für die Zwangskraft gemäß $\vec{F}_{ZW} = \lambda\vec{\nabla} f$ und bekommen:

$$\vec{F}_{ZW} = \lambda\vec{\nabla} f = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi\right) = \lambda\vec{e}_r \tag{38}$$

2. Das führt auf die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\vec{e}_r: \quad m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -mgsin\varphi + \lambda \tag{39}$$

$$\vec{e}_\varphi: \quad 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = -gcos\varphi \tag{40}$$

Leiten wir f zwei mal nach der Zeit ab so erhalten wir direkt die Lösung für $r(t)$:

$$r = a \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0 \tag{41}$$

Somit lassen sich die Bewegungsgleichungen vereinfach zu:

$$\vec{e}_r: \quad -ma\dot{\varphi}^2 = -mgsin\varphi + \lambda \tag{42}$$

$$\vec{e}_\varphi: \quad a\ddot{\varphi} = -gcos\varphi \tag{43}$$

λ kann nun direkt abgelesen werden:

$$\lambda = m(gsin\varphi - a\dot{\varphi}^2) \tag{44}$$

Weiterhin gilt:

$$\vec{e}_\varphi: \quad a\ddot{\varphi} = -gcos\varphi \quad \rightarrow \quad a\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -g\dot{\varphi}cos\varphi \tag{45}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}^2) = -g\frac{d}{dt}sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = -\frac{2g}{a}sin\varphi + C \tag{46}$$

Anfangsbedingung:

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad , \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2g}{a}sin\varphi_0 \tag{47}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{2g}{a}}(sin\varphi_0 - sin\varphi)^{\frac{1}{2}} \tag{48}$$

$$\Rightarrow \quad v(\varphi) = a\dot{\varphi} = -\sqrt{2ga}(sin\varphi_0 - sin\varphi)^{\frac{1}{2}} \tag{49}$$

3. Damit bekommt man schließlich für die Zwangskraft:

$$\vec{F}_C = \lambda \vec{e}_r = \vec{e}_r(mgsin\varphi - ma\dot{\varphi}^2) = mg(3sin\varphi - 2sin\varphi_0) \tag{50}$$

Für die Kreisbahn nötige Zentripetalkraft: $-ma\dot{\varphi}^2$

Komponente der Gravitationskraft in zentripetaler Richtung: $-mgsin\varphi$

4 Keplers 3. Gesetz

Das 3. Keplersche Gesetz für die Planetenbewegung besagt, dass das Verhältnis $\frac{T^2}{a^3}$ für alle Planeten gleich ist: Hier ist T die Umlaufzeit, a die große Halbachse der Ellipsenbahn. Dieses Gesetz gilt nur für ein Zweikörperproblem unter der Annahme, dass die Masse der Sonne M sehr groß ist gegenüber der Masse des Planeten m. Beweisen Sie dieses Gesetz, ausgehend von der Drehimpulserhaltung.
Hinweis: Starten sie mit dem Ausdruck für den Betrag des Drehimpulses $l = \mu r^2 \dot{\vartheta}^2$ (μ ist die reduzierte Masse, r der momentane Abstand Sonne - Planet und ϑ der Winkel des Fahrstrahls zur x - Achse) und integrieren Sie beide Seiten dieser Gleichung über die Umlaufzeit. Benutzen Sie dann die Beziehungen für Aphel - und Perihel - Achse und die Näherung $m \ll M$.

Lösung:

Die Drehimpulserhaltung:

$$l = \mu r^2 \dot{\vartheta} = const. \tag{51}$$

Integration über die Umlaufzeit liefert:

$$\int_0^T l dt = \int_0^T \mu r^2 \dot{\vartheta} dt \tag{52}$$

$$lT = \int_0^{2\pi} \mu r^2 d\vartheta = 2\mu \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\vartheta = 2\mu\pi ab \tag{53}$$

Jetzt benutzen wir die Beziehungen für die Halbachsen der Ellipse:

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} \quad , \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{54}$$

Damit bekommen wir:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu^2 b^2}{l^2 a} = \frac{4\pi^2\mu^2 p}{l^2} \tag{55}$$

Mithilfe des Ausdrucks für den Parameter p:

$$p = \frac{l^2}{\alpha\mu} \tag{56}$$

bekommen wir das Endergebnis:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha} \tag{57}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist nicht konstant (hängt von der Masse m ab):

$$\alpha = GMm \quad , \quad \mu = \frac{Mm}{M+m} \tag{58}$$

und damit:

$$\frac{4\pi^2\mu}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \tag{59}$$

Für den Fall $m \ll M$ vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \approx \frac{4\pi^2}{GM} = const. \tag{60}$$

5 Teilchen im konstanten Zentralkraftfeld

Ein Teilchen der Masse m mit Ortsvektor $\vec{r}$ bewege sich in einem dreidimensionalen Kraftfeld, wobei die Kraft in Richtung auf den Ursprung zeigt und Ihr Betrag K unabhängig vom Ort ist.

1. Wie lautet die Newton'sche Bewegungsgleichung für dieses Problem? Bestimmen sie die zugehörige potentielle Energie und geben Sie den Energieerhaltungssatz an.

2. Zeigen Sie, ausgehend von der Newton'schen Bewegungsgleichung, dass auch der Drehimpuls erhalten ist. Wie kann man daraus schließen, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt?

3. Beweisen Sie den Zusammenhang:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2r^2} + \dot{r}^2 \tag{61}$$

   Hier ist r der Abstand vom Ursprung und $\vec{L}$ ist der Drehimpuls.
   Hinweis: Berechen Sie $\vec{L}^2$ und benutzen Sie $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

Lösung:

1. Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet hier:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}(\vec{r}) = -K\vec{e}_r \tag{62}$$

Es liegt ein Zentralkraftfeld vor, so dass die Kraft konservativ ist. Integration in radialer Richtung liefert die potentielle Energie:

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{K}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = +K \int \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = K \int dr = K|\vec{r}| \tag{63}$$

(Die Integrationskonstante ist hier zu Null angenommen.) Der Energieerhaltungssatz lautet somit:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + K|\vec{r}| \tag{64}$$

2. Weil das vorliegende Kraftfeld ein Zentralfeld ist, ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße. Expliziter Nachweis:

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 - K\vec{r} \times \vec{e}_r = 0 \tag{65}$$

Wegen $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ liegen alle Bahnpunkte in einer Ebene, deren Normalenvektor durch den konstanten Drehimpulsvektor $\vec{L}$ gegeben ist.

3. Für eine ebene Bewegung gilt in Polarkoordinaten einerseits:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \tag{66}$$

und andererseits:

$$L = L_z = mr^2\dot{\varphi} \tag{67}$$

Wenn man hier $\dot{\varphi}$ eliminiert, erhält man:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2} \tag{68}$$

Alternativ:

$$\vec{L}^2 = m^2(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})^2 = m^2(\vec{r}^2\dot{\vec{r}}^2 - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2) = m^2r^2(\dot{\vec{r}}^2 - (\vec{e}_r \cdot \dot{\vec{r}})^2) = m^2r^2(\dot{\vec{r}}^2 - \dot{r}^2) \tag{69}$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Beziehung:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + \frac{\vec{L}^2}{m^2r^2} \tag{70}$$

6 Flaschenzug und Zwangskräfte

Die Masse m_1 hänge an dem einen Ende einer masselosen Schnur, welche über einen fixierten, reibungsfreien und nichtrotierenden Flaschenzug geführt worden sei. Am anderen Ende der Schnur hänge die Masse m_2. Schreiben Sie die newtonschen Bewegungsgleichungen in der Form:

$$m_i\ddot{\vec{x}} = \vec{F}_i + \vec{C}_i \tag{71}$$

worin $\vec{F}_i$ für die äußere Kraft auf die Masse $m_i (i = 1, 2)$ durch die Gravitation und $\vec{C}_i$ für die Zwangskraft für beide Massen und die finalen Bewegungsgleichungen.
Hilfe: Verwenden Sie die zweite zeitliche Ableitung der Zwangsbedingung zur Bestimmung der Zwangskraft.

Lösung:

Die geometrische Zwangsbedingung lautet:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + R\pi - L = 0 \tag{72}$$

und der Ansatz für die Zwangskräfte:

$$C_i = \lambda\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \tag{73}$$

Die Bewegungsleichungen sind:

$$m_i\ddot{x}_i - m_i g = \lambda \tag{74}$$

bzw. ausführlich:

$$\ddot{x}_1 = \frac{\lambda + m_1 g}{m_1} \quad , \quad \ddot{x}_2 = \frac{\lambda + m_2 g}{m_2} \tag{75}$$

Aus der zweiten Zeitableitung von f folgt:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 \tag{76}$$

und in Kombination mit den Bewegungsgleichungen erhält man:

$$\frac{\lambda + m_1 g}{m_1} = -\frac{\lambda + m_2 g}{m_2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2\frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \tag{77}$$

und somit die Zwangskräfte:

$$C_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda = -2 \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = -2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} g \tag{78}$$

Die finalen Bewegungsgleichungen lauten also nun:

$$\ddot{x}_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad \ddot{x}_2 = -g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \tag{79}$$