## Ferienkurs

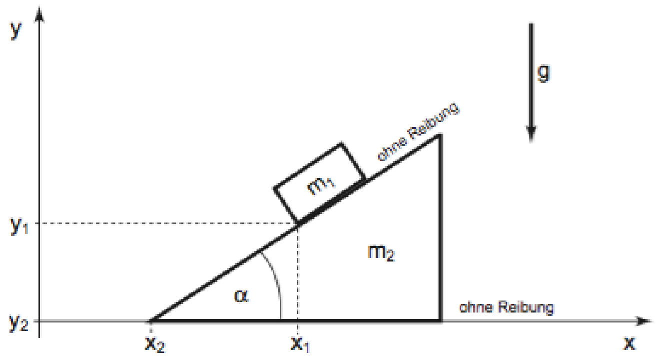
# Theoretische Physik: Mechanik

### Blatt 3 - Angabe

PHYSIK
DEPARTMENT

# 1 Gleiten und Zwangsbedingungen

Wir betrachten einen Block der Masse $m_1$ auf einem Keil der Masse $m_2$. Der Keil gleitet nur auf der horizontalen Ebene, während der Block auf dem Keil gleitet. Die Bewegung ist zur Gänze auf die $x - y$ - Ebene beschränkt (siehe Abbildung). Betrachten Sie nur die Bewegung, solange sich der Block auf dem Keil befindet. Die beiden Bewegungen verlaufen ohne Reibung. Das System befinde sich in einem homogenen Schwerefeld.




1. Formulieren Sie die geometrischen Zwangsbedingungen.
2. Konstruieren Sie die Ausdrücke für die Zwangskräfte, die zunächst unbekannte Lagrangeparameter enthalten. Wieviele sind das?
3. Nun führen wir neue Koordinaten $s_1$ und $s_2$ ein, die alle Zwangsbedingungen beinhalten:

   $$x_2 = s_2 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad x_1 = s_2 + s_1 cos\alpha \quad , \quad y_1 = s_1 sin\alpha \tag{1}$$

   Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion als Funktion von $s_1$ und $s_2$ und geben Sie die resultierenden Bewegungsgleichungen an.
4. Bestimmen Sie wenigstens eine Erhaltungsgröße für die Lagrange-Funktion aus Teilaufgabe 3.

   **Hinweis:** Es gibt insgesamt 2 Erhaltungsgrößen

# 2 Zeitabhängige Lagrange-Funktion und geschwindigkeitsabhängige Kräfte

Betrachten Sie zuerst die zeitabhängige Lagrange-Funktion:

$$L_1 = e^{\gamma t}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right) \quad , \quad \gamma > 0 \tag{2}$$

1. Bestimmen Sie den kanonischen Impuls. Ist die Koordinate $q$ zyklisch?

2. Bestimmen und lösen Sie die Bewegungsgleichung.
3. Betrachten Sie im Folgenden die Lagrange-Funktion:

$$L_2 = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2 \tag{3}$$

zusammen mit der dissipativen Funktion:

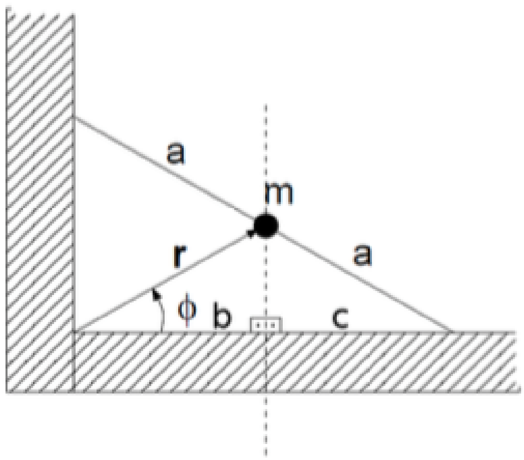
$$F = \frac{m}{2}\gamma\dot{q}^2 \tag{4}$$

Bestimmen Sie den kanonischen Impuls. Ist die Koordinate $q$ zyklisch?

4. Bestimmen und lösen Sie die Bewegungsgleichung. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem von Teilaufgabe 2.

# 3 Stange gleitet Wand hinab

Eine Masse $m$ sei genau in der Mitte einer masselosen Stange der Länge $2a$ fest angebracht. Dieses Gebilde lehne reibungsfrei an einer Wand und gleite wegen der Gravitationskraft, die auf $m$ wirkt an ihr hinab. Die Stange bleibt zu jeder Zeit mit der Wand in Berührung.




1. Formulieren Sie die geometrische Zwangsbedingung für die Bewegung der Masse $m$ und konstruieren SIe einen formalen Ausdruck für die Zwangskraft.
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Masse $m$ als Funktion ihrer Position (z. B. $\varphi$.)
3. Berechnen Sie die Zwangskraft konkret und interpretieren Sie die auftretenden Terme.

**Hilfe:** Drücken Sie die Zwangsbedingung $f = 0$ in Polarkoordinaten aus. Verwenden Sie die erste und zweite zeitliche Ableitung der Zwangsbedingung zur Bestimmung der Zwangskraft.

# 4 Keplers 3. Gesetz

Das 3. Keplersche Gesetz für die Planetenbewegung besagt, dass das Verhältnis $\frac{T^2}{a^3}$ für alle Planeten gleich ist: Hier ist $T$ die Umlaufzeit, $a$ die große Halbachse der Ellipsenbahn. Dieses Gesetz gilt nur für ein Zweikörperproblem unter der Annahme, dass die Masse der Sonne $M$ sehr groß ist gegenüber der Masse des Planeten $m$. Beweisen Sie dieses Gesetz, ausgehend von der Drehimpulserhaltung.
**Hinweis:** Starten sie mit dem Ausdruck für den Betrag des Drehimpulses $l = \mu r^2 \dot{\vartheta}^2$ ($\mu$ ist die reduzierte Masse, $r$ der momentane Abstand Sonne - Planet und $\vartheta$ der Winkel des Fahrstrahls zur $x$ - Achse) und integrieren Sie beide Seiten dieser Gleichung über die Umlaufzeit. Benutzen Sie dann die Beziehungen für Aphel - und Perihel - Achse und die Näherung $m \ll M$.

# 5 Teilchen im konstanten Zentralkraftfeld

Ein Teilchen der Masse $m$ mit Ortsvektor $\vec{r}$ bewege sich in einem dreidimensionalen Kraftfeld, wobei die Kraft in Richtung auf den Ursprung zeigt und Ihr Betrag $K$ unabhängig vom Ort ist.

1. Wie lautet die Newton'sche Bewegungsgleichung für dieses Problem? Bestimmen sie die zugehörige potentielle Energie und geben Sie den Energieerhaltungssatz an.

2. Zeigen Sie, ausgehend von der Newton'schen Bewegungsgleichung, dass auch der Drehimpuls erhalten ist. Wie kann man daraus schließen, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt?

3. Beweisen Sie den Zusammenhang:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^2} + \dot{r}^2 \tag{5}$$

   Hier ist $r$ der Abstand vom Ursprung und $\vec{L}$ ist der Drehimpuls.
   Hinweis: Berechen Sie $\vec{L}^2$ und benutzen Sie $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

# 6 Flaschenzug und Zwangskräfte

Die Masse $m_1$ hänge an dem einen Ende einer masselosen Schnur, welche über einen fixierten, reibungsfreien und nichtrotierenden Flaschenzug geführt worden sei. Am anderen Ende der Schnur hänge die Masse $m_2$. Schreiben Sie die newtonschen Bewegungsgleichungen in der Form:

$$m_i \ddot{\vec{x}} = \vec{F}_i + \vec{C}_i \tag{6}$$

worin $\vec{F}_i$ für die äußere Kraft auf die Masse $m_i (i = 1, 2)$ durch die Gravitation und $\vec{C}_i$ für die Zwangskraft für beide Massen und die finalen Bewegungsgleichungen.
**Hilfe:** Verwenden Sie die zweite zeitliche Ableitung der Zwangsbedingung zur Bestimmung der Zwangskraft.