Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 2 - Lösung

1 Drehmoment, Drehimpuls und Schwerpunkt

Drei Teilchen der Masse 2, 3 und 5 bewegen sich unter dem Einfluß eines Kraftfeldes derart, dass ihre Ortsvektoren sich folgendermaßen darstellen lassen:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2t \\ -3 \\ t^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} t+1 \\ 3t \\ -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \\ 2t-1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1. Berechnen Sie den gesamten Drehimpuls des Systems und das gesamte auf das System wirkende Drehmoment vom Ursprung aus betrachtet.
2. Berechnen Sie den gesamten Drehimpuls des Systems und das gesamte auf das System wirkende Drehmoment vom Massenschwerpunkt aus betrachtet.

Lösung:

Um das gesamte Drehmoment und den gesamten Drehimpuls zu berechnen, müssen wir zuerst die einzelnen Geschwindigkeiten berechnen:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\vec{r}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\vec{r}}_3 = \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Dies liefert dann den gesamten Drehimpuls bezüglich des Ursprungs des Inertialsystems:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_r \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \begin{pmatrix} -12t \\ -4t^2 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 10t^2 - 10t \\ 5t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12t + 31 \\ 6t^2 - 10t - 12 \\ 5t^2 + 21 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und daraus auch das gesamte Drehmoment bezüglich des Ursprungs des Inertialsystems:

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12t - 10 \\ 10t \end{pmatrix} \tag{4}$$

Wir berechnen nun den Schwerpunkt und seine Geschwindigkeit in der Form:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5t^2 + 7t + 3 \\ 4t - 6 \\ 2t^2 + 10t - 17 \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\vec{R}} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10t + 7 \\ 4 \\ 4t + 10 \end{pmatrix} \tag{5}$$

wobei M die Gesamtmasse des Systems ist. Dies liefert den Drehimpuls der Gesamtmasse im Schwerpunkt:

$$\vec{L}_{SP} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} (4t-6)(4t+10) - (2t^2 + 10t - 17)4 \\ (2t^2 + 10t - 17)(10t + 7) - (5t^2 + 7t + 3)(4t + 10) \\ (5t^2 + 7t + 3)4 - (4t - 6)(10t + 7) \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8t^2 - 24t + 8 \\ 36t^2 - 182t - 149 \\ -20t^2 + 60t + 54 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Damit können wir nun den inneren Drehimpuls und das Drehmoment bezüglich des Schwerpunkts berechnen:

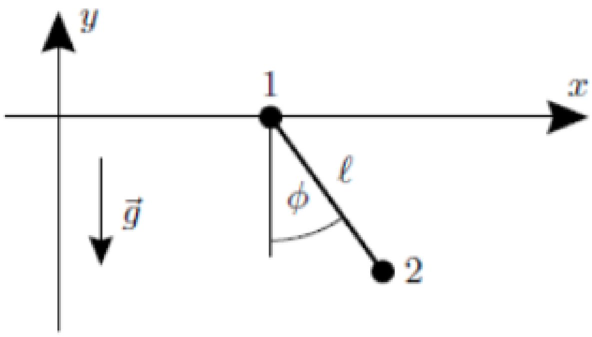
$$\vec{L}_R = \vec{L} - \vec{L}_{SP} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8t^2 - 96t + 302 \\ 24t^2 + 82t + 29 \\ 70t^2 - 60t - 156 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\vec{N}_R = \dot{\vec{L}}_R = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -16t - 96 \\ 48t + 82 \\ 140t - 60 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Beachten Sie, dass diese Rechnung viel komplizierter wäre, wenn wir den inneren Drehimpuls und das Drehmoment bezüglich des Schwerpunkts direkt aus den Koordinaten $\vec{r}_i - \vec{R}$ und deren Ableitungen berechnet hätten. Beachten Sie außerdem, dass die Gleichung $\vec{N}_R = \dot{\vec{L}}_R$ nur gilt, weil $\vec{R}$ der Schwerpunkt ist. Für ein beliebiges Koordinatensystem gilt diese Beziehung nicht.

2 Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt

Eine Punktmasse m_2 sei wir in der Abbildung dargestellt mit Hilfe einer masselosen Stange der Länge l an einer Punktmasse m_1 so aufgehängt, dass die Anordnung in der (x, y) - Ebene schwingen kann. Die Masse m_1 ist entlang der x - Achse reibungsfrei verschiebbar. Die gesamte Anordnung befinde sich in einem homogenen Schwerefeld in Richtung der negativen y - Achse.



1. Welche Zwangsbedingungen liegen vor, wenn Sie dieses Problem in drei Raumdimensionen betrachten? Drücken Sie die Koordinaten (x_2, y_2) der Masse m_2 durch die Position x_1 der Masse m_1 und den Winkel φ aus.

2. Erläutern Sie, warum hier neben dem Energieerhaltungssatz ein zweiter Erhaltungssatz gilt. Wie lautet die zugehörige Erhaltungsgröße?

3. Zeigen Sie mit Hilfe dieses zweiten Erhaltungssatzes, dass die Bahnkurve der zweiten Masse durch:

$$\left(\frac{x_2(t) - A(t)}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{y_2(t)a_y}{}\right)^2 = 1 \tag{9}$$

beschrieben werden kann. Was ergibt sich für a_x, a_y und $A(t)$? Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit die Bewegung auf einer Ellipse erfolgt?

Lösung:

1. In $3D$ liegen vier (holonom skleronome) Zwangsbedingungen vor:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \\ z_2 &= 0 \\ y_1 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= l^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Von den ursprünglich sechs Freiheitsgraden verbleibenalso zwei unabhängige Freiheitsgrade x_1 und φ. Die Position der Masse m_1 ist dann durch x_1 und die der Masse m_2 ist durch:

$$x_2 = x_1 + lsin\varphi \tag{11}$$

$$y_2 = -lcos\varphi \tag{12}$$

gegeben.

2. Weil das Gesamtsystem invariant gegen eine Veschiebung in x - Richtung ist, ist die x - Komponente des Schwerpunktsimpulses:

$$P_z = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = const. = P_0 \tag{13}$$

erhalten.

3. Die gewünschte Gleichung enthält nur die Variablen x_2 und y_2 der zweiten Masse, also muss man x_1 und φ aus den Gleichungen (11) und (12) und dem Erhaltungssatz für P_z eliminieren. Einerseits liefern die Gleichungen (11) und (12):

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{l}\right)^2 = 1 \tag{14}$$

Andererseits liefert die Integration des Erhaltungssatzes für P_x:

$$MX(t) = m_1x_1 + m_2x_2 = P_0t + MX_0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{m_2}{m_1}x_2 + \frac{P_0t + MX_0}{m_1} \tag{15}$$

mit $M = m_1 + m_2$ und $X(t)$ sei die x - Komponente des Schwerpunktes. Wenn man x_1 in (13) einsetzt, erhält man:

$$\left(\frac{Mx_2 - (P_0t + MX_0)}{m_1l}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{l}\right)^2 = 1 \tag{16}$$

Vergleich mit:

$$\left(\frac{x_2(t) - A(t)}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{y_2(t)}{a_y}\right) = 1 \tag{17}$$

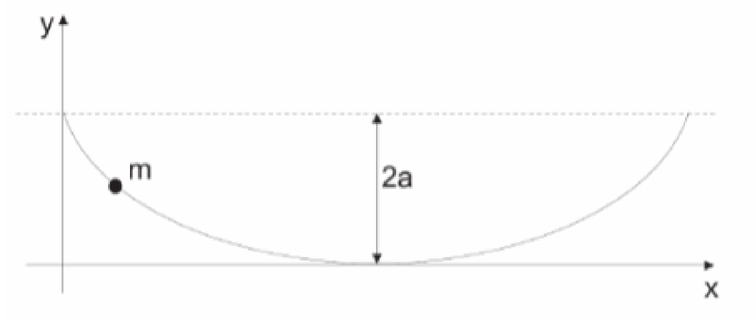
liefert:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{m_1}{M} l \\ a_y &= l \\ A(t) &= \frac{P_0}{M} t + X_0 \end{aligned} \tag{18}$$

Die Bewegung erfolgt dann auf einer Ellipse, wenn $A(t)$ nicht von der Zeit abhängt. In diesem Fall muss also die x - Komponente P_x des Schwerpunktimpulses verschwinden: $P = 0$.

3 Bewegung auf Zykloide

Eine Perle mit der Masse m gleite reibungsfrei auf einem Draht, welcher die Form einer Zykloide hat ($0 \leq \vartheta \leq 2\pi$):



$$x = a(\vartheta - sin\vartheta) \tag{19}$$

$$y = a(1 + cos\vartheta) \tag{20}$$

1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System auf.
2. Führen Sie die Substitution $u = cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$ durch.
3. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese.

Lösung:

1. Es gilt:

$$\dot{x} = a\dot{\vartheta}(1 - cos\vartheta) \tag{21}$$

$$\dot{y} = -a\dot{\vartheta}sin\vartheta \tag{22}$$

Somit folgt für die kinetische und die potentielle Energie:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{ma^2\dot{\vartheta}^2}{2}((1 - cos\vartheta)^2 + sin^2\vartheta) = ma^2\dot{\vartheta}^2(1 - cos\vartheta) \tag{23}$$

$$V = mgy = mga(1 + cos\vartheta) \tag{24}$$

DIe Lagrange-Funktion ist also:

$$L = T - V = ma^2\dot{\vartheta}^2(1 - cos\vartheta) - mga(1 + cos\vartheta) \tag{25}$$

2. Durch Anwenden der Additionstheoreme und der Ableitung des Arcuscosinus erhält man:

$$\dot{\vartheta} = -2\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dot{u} \quad , \quad 1 - cos\vartheta = 2(1 - u^2) \quad , \quad 1 + cos\vartheta = 2u^2 \tag{26}$$

also:

$$L = 16ma^2\dot{u}^2\frac{1}{1-u^2}(1 - u^2) - 2mgau^2 = 8ma^2\dot{u}^2 - 2mgau^2 \tag{27}$$

3. Als nächstes bestimmt man die Bewegungleichungen durch:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \tag{28}$$

also:

$$\frac{d}{dt}16ma^2\dot{u} = 16ma^2\ddot{u} = -4mgau \tag{29}$$

Was die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators ergibt:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{4a}u = 0 \tag{30}$$

Diese kann durch folgenden Ansatz gelöst werden:

$$u(t) = Acos\omega t + Bsin\omega t \qquad mit \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{4a}} \tag{31}$$

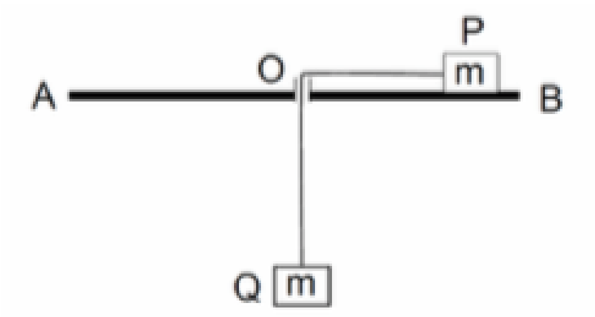
Für die Periode gilt dann somit:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}} \tag{32}$$

4 Gleiten und Ziehen in der Ebene

In der Skizze bezeichne AB den Querschnitt durch eine reibungsfreie horizontale Ebene mit einer kleinen Öffnung O. Ein Faden der Länge l sei durch die Öffnung verlegt und verbindet zwei Teilchen P und Q mit jeweils der gleichen Masse m. Während die Masse Q an dem einen Ende des Fadens (im Abstand z von der Tischoberfläche) frei hängt, sei die Masse P anfänglich in der Entfernung a von der Öffnung positioniert. Das Teilchen P habe eine Anfangsgeschwindigkeit vom Betrag v_0 senkrecht zu der Linie OP (d.h. $\vec{v}_0$ liege senkrecht auf dem Aufgabenblatt). r bezeichne die momentane Entfernung OP und ϑ bezeichne den Winkel zwischen OP und einer beliebigen festen Linie durch O in der Ebene.

Hinweis: Beachten Sie die Zwangsbedingung $z = l - r$.



1. Stellen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System unter Verwendung der verallgemeinerten Koordinaten r und ϑ auf.
2. Stellen Sie die Lagrangegleichungen auf, und bestimmen Sie daraus die DIfferentialgleichung, die die Bewegung von P nur in Abhängigkeit von r und Ableitungen von r beschrebt.
3. Das Teilchen P habe die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{ag}$. Zeigen Sie, dass sich das System dann in einem Gleichgewicht befindet, mit P auf einer Kreisbahn $r = a$.

Lösung:

1. Aufgrund der Symmetrie des Problems bieten sich Zylinderkoordinaten an: r, ϑ, z. Die Zwangsbedingung ist:

$$r + z = l \quad \Rightarrow \quad z = l - r \tag{33}$$

Somit gilt für die kinetische Energie, die potentielle Energie und die Lagrange-Funktion:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}^2 \tag{34}$$

$$V = -mgz = mg(r - l) \tag{35}$$

$$L(r, \vartheta) = T - V = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\vartheta}^2 - mg(r - l) \tag{36}$$

2. Die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\vartheta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2\dot{\vartheta} = C \tag{37}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2m\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 + mg = 0 \tag{38}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 2m\ddot{r} - mr\left(\frac{C}{mr^2}\right)^2 + mg \tag{39}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 2m\ddot{r} - \frac{C^2}{mr^3} + mg \tag{40}$$

3. Man zeigt, dass sich die angegebene Kreisbahn eine Lösung der Bewegungsleichungen ist. Für die Kreisbahn gilt:

$$r(t) = a \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} = 0 \tag{41}$$

Winkelgeschwindigkeit:

$$\dot{\vartheta} = \frac{v_0}{a} = \sqrt{\frac{g}{a}} \tag{42}$$

Drehimpuls:

$$C = ma^2\sqrt{\frac{g}{a}} \tag{43}$$

Einsetzen ergibt dann:

$$2m\ddot{r} - \frac{C^2}{mr^3} + mg = 0 \tag{44}$$

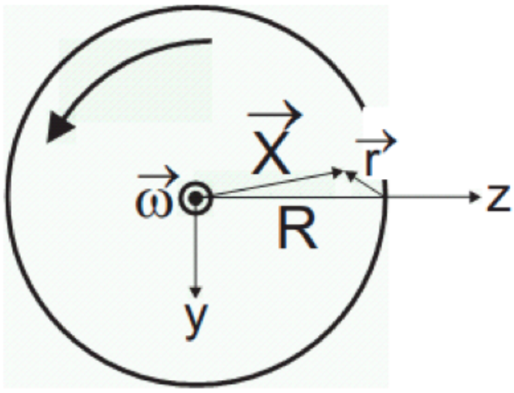
$$0 \stackrel{!}{=} 0 - \frac{m^2a^4g}{ama^3} + mg = -mg + mg = 0 \tag{45}$$

5 Fallender Stein

Wir lassen einen Stein der Masse m in einen Brunnen fallen, der am Äquator steht. Wegen der Erdrotation folgt die Trajektorie des Steins nicht dem senkrechten Lot in Richtung Erdmittelpunkt. Diese Bewegung wird im rotierenden Bezugssystem der Erde durch:

$$m\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = \vec{F}_g - 2m\vec{\omega} \times \frac{d\vec{X}}{dt} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{X}) \tag{46}$$

beschrieben, wobei der Koordinatenursprung im Erdmittelpunkt liegt und die z - Achse durch die Brunnenöffnung verläuft. Wir nehmen an, dass die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ konstant und die Erde eine Kugel mit Radius R ist.



1. Führen Sie die Relativkoordinate:

$$\vec{r} = \vec{X} - R\vec{e}_z \tag{47}$$

ein, wobei R die Distanz vom Erdmittelpunkt zur Brunnenöffnung ist. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\vec{r}(t)$ im erdfesten Koordinatensystem. Nehmen Sie hierbei vereinfachend an, dass die Erdanziehungskraft $\vec{F}_g = -mg_0\vec{e}_z$ die der ruhenden Erde und unabhängig von $\vec{r}$ ist. Nehmen Sie ferner an, dass die Zentrifugalkraft ebenfalls unabhängig von $\vec{r}$ ist, was für nicht zu tiefen Brunnen näherungsweise zutrifft.

2. Lösen Sie die Bewegungsgleichung zunächst unter Vernachlässigung der Corioliskraft und berechnen Sie die Trajektorie $\vec{r}_0(t)$ des Steins. Zeigen Sie, dass er einer effektiven Erdbeschleunigung $g_{eff} = g_0 - \omega^2 R$ unterliegt.

3. Ausgehend von dieser Trajektorie $\vec{r}_0(t)$ addieren wir nun die Corioliskraft. Setzen Sie dazu $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}$ und zeigen Sie, dass für geeignete Anfangsbedingungen die Differentialgleichung gilt:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -2\vec{\omega} \times (\vec{r}_0 + \vec{u}) \tag{48}$$

4. Nehmen Sie schließlich an, dass die Abweichung $\vec{u}$ vom Lot so klein ist, dass sie auf der rechten Seite von Gleichung (48) vernachlässigt werden kann, und berechnen Sie für diesen Fall explizit $\vec{u}(t)$. Zeigen SIe, dass die Trajektorie $\vec{e}(t)$ gegenüber $\vec{r}_0(t)$ nach Osten abgelenkt wird.

Lösung:

1. Nach der Zeichnung gilt:

$$\vec{X} = R\vec{e}_z + \vec{r} \tag{49}$$

wobei R der Erdradius ist. Exakt gilt die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g_0\vec{e}_z - \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (R\vec{e}_z + \vec{r})] - 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{50}$$

Wir vernachlässigen die $\vec{r}$ - Abhängigkeit der Zentrifugalkraft:

$$\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (R\vec{e}_z + \vec{r})] \approx -\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times R\vec{e}_z] \tag{51}$$

Wegen $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$ gilt:

$$-\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times R\vec{e}_z] = \omega^2 R\vec{e}_z \tag{52}$$

Damit bekommen wir die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (-g_0 + \omega^2 R)\vec{e}_z - 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{53}$$

2. Ohne die Corioliskraft vereinfacht sich die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = -g_0\vec{e}_z + \omega^2 R\vec{e}_z \tag{54}$$

und wir erhalten mit geeigneten Anfangsbedingungen:

$$\vec{r}_0(t) = -\frac{1}{2}[d_0 - \omega^2 R]\vec{e}_z t^2 = \frac{1}{2} g_{eff}\vec{e}_z t^2 \tag{55}$$

3. Wir gehen mit dem Ansatz:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{u}(t) \tag{56}$$

in die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -g_{eff}\vec{e}_z - 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{57}$$

und bekommen wegen:

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = -g_{eff}\vec{e}_z \tag{58}$$

als verbleibende Gleichung:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{59}$$

Integration über t zusammen mit $\vec{u}(0) = \dot{\vec{u}}(0) = \vec{0}$ und $\vec{r}(0) = \vec{0}$ liefet dann die Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -2\vec{\omega} \times \vec{r} \tag{60}$$

4. Für kleine Abweichungen vom Lot ($|\vec{u}| \ll |\vec{r}_0|$) können wir $\vec{r}$ durch $\vec{r}_0$ ersetzen und bekommen als Bewegungsgleichung:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -2\vec{\omega} \times \vec{r}_0 = \vec{\omega} \times g_{eff}\vec{e}_z t^2 = g_{eff} t^2 \vec{\omega} \times \vec{e}_z \tag{61}$$

mit der Lösung:

$$\vec{u}(t) = \frac{g_{eff} t^3}{3} \vec{\omega} \times \vec{e}_z = -\frac{d_{eff}\omega t^3}{3} \vec{e}_y \tag{62}$$

6 Rotierende Bezugssysteme

Die Beschleunigung eines Teilchens der Masse m an der Stelle $\vec{r}(t)$ in einem nicht-inertialen Bezugssystem, welches mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von $\vec{\omega}$ um den Ursprung rotiert ist gegeben durch:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} - 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{63}$$

Berechnen Sie die kartesischen Komponenten der Beschleunigung, falls $\vec{\omega} \parallel \vec{e}_y$.

Lösung:

Die Winkelgeschwindigkeit ist $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_y$. Dies liefert für die Beschleunigung:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}} &= \frac{\vec{F}}{m} - 2\omega(\vec{e}_y \times \dot{\vec{r}}) - \omega^2 \vec{e}_y \times (\vec{e}_y \times \vec{r}) && (64)\\
&= \frac{\vec{F}}{m} - 2\omega(\vec{e}_y \times \dot{\vec{r}}) - \omega^2 \vec{e}_y(\vec{e}_y / cdot \vec{r}) + \omega^2 \vec{e}_y^2 \vec{r} && (65)\\
&= \frac{\vec{F}}{m} - 2\omega(\vec{e}_y \times \dot{\vec{r}}) - \omega^2 y \vec{e}_y + \omega^2 \vec{r} && (66)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{F_x}{m} - 2\omega\dot{z} + \omega^2 x \\ \frac{F_y}{m} \\ \frac{F_z}{m} + 2\omega\dot{x} + \omega^2 z \end{pmatrix} && (67)
\end{aligned}$$