Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 1 - Lösung

PHYSIK
DEPARTMENT

1 Kurvenintegral

Das Magnetfeld in der Umgebung eines stromdurchflossenen Drahtes liegt in der Ebene senkrecht zum Draht. Wir betrachten die Ebene $z = 0$, der Draht durchstößt diese Ebene senkrecht bei $(0, 0)$. Das Magnetfeld in der Ebene ist dann:

$$\vec{H}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \tag{1}$$

Man berechne das Kurvenintegral von $\vec{H}$ längs des Einheitskreises:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} cost \\ sint \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \leq t \geq 2\pi \tag{2}$$

Lösung:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} cost \\ sint \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \leq t \geq 2\pi \tag{3}$$

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -sint \\ cost \end{pmatrix} \tag{4}$$

Das Kurvenintegral ist daher:

$$\int_w \vec{H}(\vec{w}(t)) \cdot \frac{d\vec{w}(t)}{dt} dt = \int_0^{2\pi} dt \underbrace{\frac{1}{w_x(t)^2 + w_y(t)^2}}_{=cos^2 t + sin^2 t = 1} \begin{pmatrix} -w_y(t) \\ w_x(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -sint \\ cost \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} dt(sin^2 t + cos^2 t) = 2\pi \tag{5}$$

2 Konservative Kraftfelder

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Kraftfelder konservativ sind:

   (i) $\vec{F}_1(\vec{r}) = (-y, x, 0)^T$

   (ii) $\vec{F}_2(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\vec{r} = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})^T$

   (iii) $\vec{F}_3(\vec{r}) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)^T$

2. Berechnen Sie das Linienintegral in der x-y-Ebene über den Kreis mit Radius R um den Koordinatenursprung:

$$\oint_{K_R(O)} \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} \tag{6}$$

Lösung:

1. Ein Kraftfeld, welches in einem einfach-zusammenhängenden Gebiet definiert ist, ist konservativ, wenn die Rotation in jedem Punkt des Gebiets verschwindet. Wir untersuchen daher für die Felder $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ die Rotation.

   (i) Der Definitionsbereich von $\vec{F}_1$ ist ganz $\mathbb{R}^3$ und damit einfach-zusammenhängend. Für die Rotation von $\vec{F}_1$ gilt:

   $$\nabla \times \vec{F}_2(\vec{r}) = \nabla \times (-y, x, 0)^T = (0, 0, 2)^T \tag{7}$$

   Daraus schließen wir, dass $\vec{F}_1$ nicht konservativ ist.

   (ii) Der Definitionsbereich von $\vec{F}_2$ ist $\mathbb{R}^3$ ohne den Ursprung $(0, 0, 0)^T$ und damit einfach-zusammenhängend. Für die Rotation von $\vec{F}_2$ gilt:

   $$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F}_1(\vec{r}) &= \nabla \times \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)^T \\ &= \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j \frac{x_k}{r^2}\right) = \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_k \partial_j \frac{1}{r^2}\right) \\ &= \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_k \frac{-2x_j}{r^4}\right) = \frac{-2}{r^4}\left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_k x_j\right) \\ &= \frac{-2}{r^4} \vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}\end{aligned} \tag{8}$$

   Daraus schließen wir, dass $\vec{F}_2$ konservativ ist.

   (iii) $\vec{F}_3$ ist nur für Punkte außerhalb der z-Achse (x = y = 0) definiert, dort gilt:

   $$\nabla \times \vec{F}_3(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{9}$$

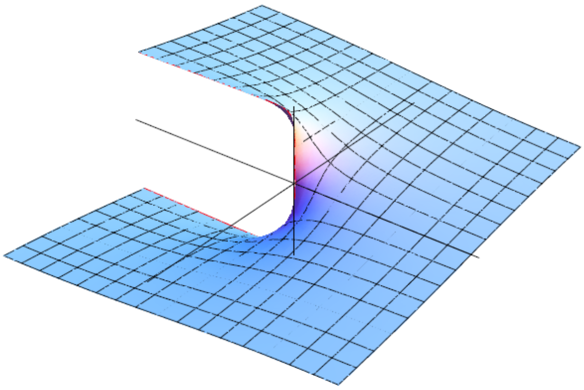
   Da die Rotation $\nabla \times \vec{F}_3$ für jeden Punkt außerhalb der z-Achse verschwindet, ist damit gezeigt, dass $\vec{F}_3$ in jedem einfach-zusammenhängenden Teilgebiet $\mathbb{R}^3$, das die z-Achse nicht enthält konservativ ist.
   Im gesamten Definitionsbereich ist $\vec{F}_3$ aber nicht konservativ, wie in 2. explizit gezeigt wird. In einem einfach-zusammenhängenden Teilgebiet wie

   $$G = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, y, z)^T : y = 0, x \leq 0\} \tag{10}$$

   kann jedoch ein Potential angegeben werden. Das Potential erhält man durch Integration. Wir führen die Integration in Zylinderkoordinaten aus. Wir wählen den Weg von $(\rho' = 1, \varphi' = 0, z' = 0)$ zunächst gerade in z-Richtung bis (1, 0, z) und anschließend gerade in x-Richtung bis $(\rho, 0, z)$ - in beiden Fällen steht die Kraft senkrecht auf dem Weg, sodass das Integral verschwindet. Anließend integrieren wir längs einer Kreislinie um die z-Achse und erhalten:

$$V(\vec{r}) = \int_\gamma \vec{F}_3 d\vec{r} = \int_0^\varphi \frac{1}{\rho}\rho\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi d\varphi \tag{11}$$

$$= \varphi = -iln\left(\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = atan2(x,y) = \begin{cases} arctan\left(\frac{x}{y}\right), & \text{wenn } x > 0 \\ arctan\left(\frac{x}{y}\right) + sgn(y)\pi, & \text{wenn } x < 0 \\ sgn(y)\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } x = 0 \end{cases} \tag{12}$$



Die Skizze zeigt das Potential für festes z als Funktion von x und y. In der Skizze ist der Sprung längs der negativen y-Achse zu sehen, der eine stetige Fortsetzung auf den gesamten $\mathbb{R}^3$ verhindert.

2. Wir parametrisieren den Kreis durch den Winkel φ

$$\vec{r}(\varphi) = (Rcos\varphi, Rsin\varphi, 0)^T \tag{13}$$

und damit:

$$d\vec{r} = (-Rsin\varphi, Rcos\varphi, 0)^T d\vec{\varphi} \tag{14}$$

Das Integral ergibt sich damit zu:

$$\oint_{K_R(O)} \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 1 d\varphi \neq 0 \tag{15}$$

Aus dem Satz von Stokes:

$$\int_A (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{16}$$

schließen wir daher, dass $\nabla \times \vec{F}_3 = 2\pi\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z$.

3 Rakete

Eine Rakete hebe in senkrechter Richtung vom Boden ab und befinde sich unter dem Einfluss konstanter Gravitationskraft $-mg$. Die Anfangsmasse des Flugkörpers sei $m(0) = m_0$ beim Start. Von der Rakete aus betrachtet werde Gas mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 und konstanter Rate $\frac{dm}{dt} = -\kappa$ ausgestoßen. Das Kräftegleichgewicht führt zu der folgenden Differentialgleichung:

$$m(t)\frac{dv(t)}{dt} + v_0\frac{dm(t)}{dt} = F \tag{17}$$

für die Rakete, wobei F für die gesamte äußere Kraft stehen soll.

1. Was ist die Bedingung für ein unmittelbares Abheben der Rakete (Beschleunigung ungleich Null bei $t = 0$) in Abhängigkeit der Entweichgeschwindigkeit des Gases v_0 und der Anfangsmasse m_0.
2. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Rakete $v(t)$ als Funktion der Zeit.

Lösung:

1. Die Bedingung für ein unmittelbares Abheben der Rakete kann geschrieben werden als:

$$a_0 = \frac{dv(t=0)}{dt} > 0 \tag{18}$$

Mit $F = -mg$ bei $t = 0$ bekommt man aus der Differentialgleichung:

$$m_0 a_0 - \kappa v_0 = -m_0 g \tag{19}$$

und somit:

$$a_0 = \kappa\frac{v_0}{m_0} - g > 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa > \frac{m_0 g}{v_0} \tag{20}$$

2. Die Differentialgleichungen:

$$m(t) = m_0 - \kappa t \tag{21}$$

können umgeschrieben werden zu:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g + \frac{v_0\kappa}{m_0 - \kappa t} \tag{22}$$

Nach Integration dieser Gleichung bekommt man:

$$v = -gt - v_0 ln(m_0 - \kappa t) + C \tag{23}$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingung $v(t=0) = 0$ bestimmt man die Integrationskonstante zu:

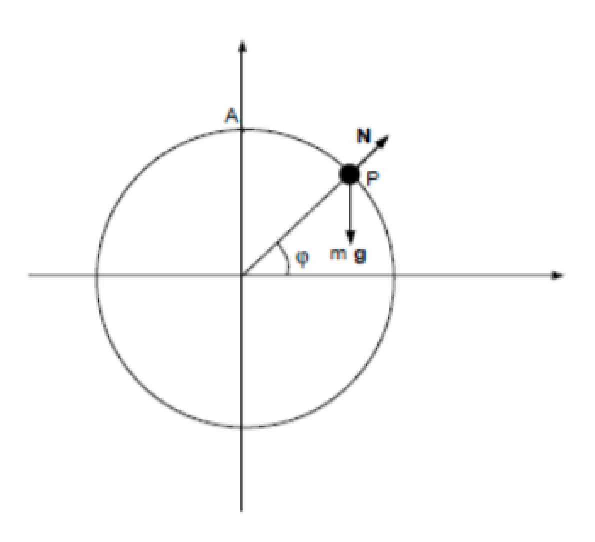
$$C = v_0 log m_0 \tag{24}$$

Hiermit ergibt sich als abschließende Lösung für die Raketengeschwindigkeit:

$$v = -gt + v_0 ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \kappa t}\right) \tag{25}$$

4 Nordpol

Ein Teilchen der Masse m ruhe auf dem Nordpol einer reibungsfreien, fixierten Kugel mit Radius R. Das Teilchen werde dann leicht gestört, sodass es die Kugel unter dem Einfluss der Gravitationskraft hinunterrutscht, ohne zu rollen. An welcher Stelle wird das Teilchen die Kugeloberfläche verlassen und wie hoch wird hier seine Geschwindigkeit sein?



Lösung:

Die Beschleunigung allgemein:

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{b}\vec{e}_r - \dot{v}\vec{e}_\varphi \tag{26}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} = \vec{e}_r(N - mgsin\varphi) - mgcos\varphi\vec{e}_\varphi \tag{27}$$

Betrachet man die radiale Komponente, so gilt:

$$-m\frac{v^2}{b} = N - mgsin\varphi \tag{28}$$

Die Geschwindigkeit kann durch die Energieerhaltung zum Ort in Beziehung gebracht werden. Die Gesamtenergie des Teilchens am Nordpol ist:

$$W_{tot}(A) = W_{pot}(A + W_{kin}(A) = mgb + 0 \tag{29}$$

P bezeichne den Punkt von Interesse - hier beträgt die Gesamtenergie des Teilchens:

$$W_{pot}(P) + W_{kin}(P) = mgbsin\varphi + \frac{1}{2}mv^2 \tag{30}$$

Da keine dissipativen Kräfte am Werk sind gilt die Erhaltung der Energie:

$$W_{pot}(A) + W_{kin}(A) = W_{pot}(P) + W_{kin}(P) \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gb(1 - sin\varphi) \tag{31}$$

Setzt man nun v^2 in den Ausdruck für die Beschleunigung ein, so erhält man:

$$-m\frac{v^2}{b} = -2mg(1 - sin\varphi) = N - mgsin\varphi \tag{32}$$

$$\Rightarrow N = mg(3sin\varphi - 2) \tag{33}$$

Das Teilchen verlässt die Kugeloberfläche sobald $N = 0$, also:

$$mg(3sin\varphi - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad sin\varphi = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \tag{34}$$

Für die Geschwindigkeit an diesem Punkt ergibt sich dann:

$$v^2 = 2gb(1 - sin\varphi) = v^2 = 2gb\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2gb}{3} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2}{3}bg} \tag{35}$$

5 N - Teilchen System

Gegeben sei ein System von N Teilchen an den Orten $\vec{x}_i$ und mit Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}_i (i = 1, ..., N)$. Zeigen Sie, dass die kinetische Energie des Systems:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \tag{36}$$

geschrieben werden kann als:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{y}}_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{X}}^2 \tag{37}$$

wobei $\vec{y}_i = \vec{x}_i - \vec{X}$ die Koordinaten des i - ten Teilchens relativ zum Schwerpunkt $\vec{X}$ des Systems sind.

Lösung:

Die kinetische Energie beträgt:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{y}}_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{X}}^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{y}}_i \cdot \dot{\vec{X}} = 0 \tag{38}$$

Den letzten Term können wir schreiben als:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{y}}_i \cdot \dot{\vec{X}} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{y}_i \cdot \dot{\vec{X}} \right) - \sum m_i \vec{y}_i \cdot \ddot{\vec{X}} = 0 \tag{39}$$

Dieser Term verschwindet deswegen, weil aus der Definition des Schwerpunkts:

$$\vec{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{40}$$

folgt, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{y}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{X} = 0 \tag{41}$$

6 Zweikörperproblem

Zwei Massepunkte m_1 und m_2 bewegen sich unter dem Einfluss des Potentials $V(r)$, dass nur vom Relativabstand $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ der beiden Massepunkte abhängt.

1. Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen für den Relativvektor $\vec{r}(t) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und den Schwerpunktsvektor

$$\vec{R}(t) = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{42}$$

2. Zeigen Sie, welche Erhaltungssätze für Impuls und Energie in der Relativ- und Schwerpunktsbewegung gelten.

3. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist und dass die Relativbewegung in der durch die Vektoren $\vec{r}(t)$ und $\dot{\vec{r}}(t)$ aufgespannten Ebene verläuft.

4. Drücken Sie die Energie und den Drehimpuls der Relativbewegung in ebenen Polarkoordinaten r und φ aus.

Lösung:

1. Es gilt Actio gegengleich Reactio, also:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= -\vec{\nabla}_1 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = +\frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{\nabla}_2 V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \end{aligned} \tag{43}$$

Aus der Summe dieser beiden Gleichungen folgt für den Schwerpunktsvektor $\vec{R}$:

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0 \tag{44}$$

Aus der Differenz der beiden Bewegungsgleichungen erhalten wir unter Verwendung von $\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$ und $\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$:

$$\begin{aligned} m_2\ddot{\vec{r}}_2 - m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= -2\frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \\ m_2\left(\ddot{\vec{R}} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\ddot{\vec{r}}\right) + m_1\left(\ddot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\ddot{\vec{r}}\right) &= -2\frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \end{aligned} \tag{45}$$

Unter Verwendung von $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$ und Einführung der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ mit $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ erhalten wir:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} \tag{46}$$

Zusammenfassend zerfällt das Zweikörperproblem also in eine kräftefreie Bewegung des Massenschwerpunktes $\vec{R}$ und eine Einkörperbewegung der Relativkoordinate $\vec{r}$ mit der reduzierten Masse μ im gegebenen Potential $V(r)$.

2. Es gilt $\ddot{\vec{R}} = 0$ und damit ist der Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} = const. \tag{47}$$

erhalten. Ebenso erhalten ist die Energie der Schwerpunktsbewegung:

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 \\ \frac{dE_R}{dt} &= \frac{1}{2}M\frac{d\dot{\vec{R}}^2}{dt} = M\dot{\vec{R}}\ddot{\vec{R}} = 0 \end{aligned} \tag{48}$$

und die Energie der Relativbewegung:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + V(r) \\ \frac{dE_r}{dt} &= \frac{1}{2}\mu\frac{d\dot{\vec{r}}^2}{dt} + \frac{dV(r)}{dt} = \mu\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} + (\vec{\nabla}V)\cdot\dot{\vec{r}} = 0 \end{aligned} \tag{49}$$

Damit ist auch die Gesamtenergie erhalten.

3. Für den Drehimpuls der Relativbewegung:

$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} = \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}} \tag{50}$$

gilt:

$$\dot{\vec{l}} = \mu\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{=\vec{0}} + \mu\vec{r}\times\underbrace{\ddot{\vec{r}}}_{\propto\vec{r}} = \vec{0} \tag{51}$$

Damit ist gezeigt, dass der Drehimpuls $\vec{l} = \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$ erhalten ist und damit $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ stets in derselben Ebene senkrecht dazu liegen.

4. In Polarkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{e}_r = \begin{pmatrix} rcos\varphi \\ rsin\varphi \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} \dot{r}cos\varphi - r\dot{\varphi}sin\varphi \\ \dot{r}sin\varphi + r\dot{\varphi}cos\varphi \end{pmatrix} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \end{aligned} \tag{52}$$

Damit erhalten wir:

$$E_r = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + V(r) = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) \tag{53}$$

und:

$$\vec{l} = \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \mu r^2\left(\underbrace{\vec{e}_r\times\vec{e}_r}_{=0} + \dot{\varphi}\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi\right) = \mu r^2\dot{\varphi} \tag{54}$$