Ferienkurs

Theoretische Physik: Mechanik

Blatt 1 - Angabe

PHYSIK
DEPARTMENT

1 Kurvenintegral

Das Magnetfeld in der Umgebung eines stromdurchflossenen Drahtes liegt in der Ebene senkrecht zum Draht. Wir betrachten die Ebene $z = 0$, der Draht durchstößt diese Ebene senkrecht bei $(0, 0)$. Das Magnetfeld in der Ebene ist dann:

$$\vec{H}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \tag{1}$$

Man berechne das Kurvenintegral von $\vec{H}$ längs des Einheitskreises:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} cost \\ sint \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \leq t \geq 2\pi \tag{2}$$

2 Konservative Kraftfelder

1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Kraftfelder konservativ sind:
   (i) $\vec{F}_1(\vec{r}) = (-y, x, 0)^T$
   (ii) $\vec{F}_2(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\vec{r} = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})^T$
   (iii) $\vec{F}_3(\vec{r}) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)^T$
2. Berechnen Sie das Linienintegral in der x-y-Ebene über den Kreis mit Radius R um den Koordinatenursprung:

$$\oint_{K_R(O)} \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} \tag{3}$$

3 Rakete

Eine Rakete hebe in senkrechter Richtung vom Boden ab und befinde sich unter dem Einfluss konstanter Gravitationskraft $-mg$. Die Anfangsmasse des Flugkörpers sei $m(0) = m_0$ beim Start. Von der Rakete aus betrachtet werde Gas mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 und konstanter Rate $\frac{dm}{dt} = -\kappa$ ausgestoßen. Das Kräftegleichgewicht führt zu der folgenden Differentialgleichung:

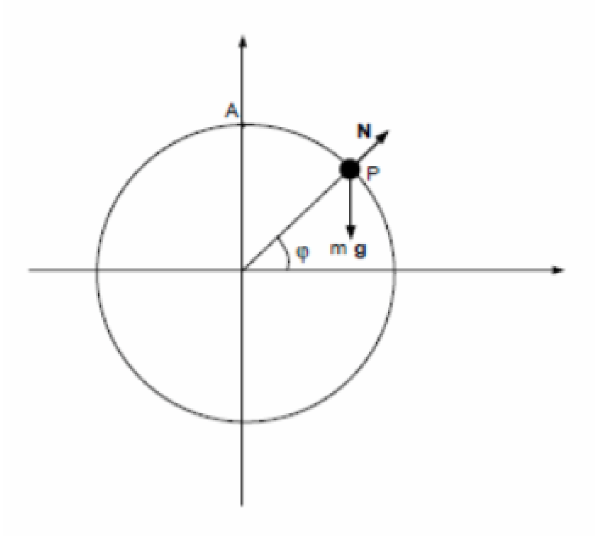
$$m(t)\frac{dv(t)}{dt} + v_0\frac{dm(t)}{dt} = F \tag{4}$$

für die Rakete, wobei F für die gesamte äußere Kraft stehen soll.

1. Was ist die Bedingung für ein unmittelbares Abheben der Rakete (Beschleunigung ungleich Null bei $t = 0$) in Abhängigkeit der Entweichgeschwindigkeit des Gases v_0 und der Anfangsmasse m_0.
2. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Rakete $v(t)$ als Funktion der Zeit.

4 Nordpol

Ein Teilchen der Masse m ruhe auf dem Nordpol einer reibungsfreien, fixierten Kugel mit Radius R. Das Teilchen werde dann leicht gestört, sodass es die Kugel unter dem Einfluss der Gravitationskraft hinunterrutscht, ohne zu rollen. An welcher Stelle wird das Teilchen die Kugeloberfläche verlassen und wie hoch wird hier seine Geschwindigkeit sein?



5 N - Teilchen System

Gegeben sei ein System von N Teilchen an den Orten $\vec{x}_i$ und mit Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}_i (i = 1, ..., N)$. Zeigen Sie, dass die kinetische Energie des Systems:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \tag{5}$$

geschrieben werden kann als:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{y}}_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{X}}^2 \tag{6}$$

wobei $\vec{y}_i = \vec{x}_i - \vec{X}$ die Koordinaten des i - ten Teilchens relativ zum Schwerpunkt $\vec{X}$ des Systems sind.

6 Zweikörperproblem

Zwei Massepunkte m_1 und m_2 bewegen sich unter dem Einfluss des Potentials $V(r)$, dass nur vom Relativabstand $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ der beiden Massepunkte abhängt.

1. Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen für den Relativvektor $\vec{r}(t) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und den Schwerpunktsvektor

$$\vec{R}(t) = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{7}$$

2. Zeigen Sie, welche Erhaltungssätze für Impuls und Energie in der Relativ- und Schwerpunktsbewegung gelten.

3. Zeigen Sie, dass der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist und dass die Relativbewegung in der durch die Vektoren $\vec{r}(t)$ und $\dot{\vec{r}}(t)$ aufgespannten Ebene verläuft.

4. Drücken Sie die Energie und den Drehimpuls der Relativbewegung in ebenen Polarkoordinaten r und φ aus.