Ferienkurs Experimentalphysik 2

Lösung zum Übungsblatt 4:

Elektromagnetische Wellen und spezielle Relativitätstheorie

Tutoren: Katharina Hirschmann und Gabriele Semino

6 Elektromagnetische Wellen

6.1 Eigenschaften elektromagnetischer Welle

Eine sich in x-Richtung ausbreitende elektromagnetische Welle kann man durch ein elektrisches und ein magnetisches Feld der Form

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \tag{1}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \tag{2}$$

darstellen. λ ist dabei die Wellenlänge, die mit der Frequenz über $\lambda = c/f$ zusammenhängt. $\vec{E}$ besitze ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur eine Komponente in z-Richtung. Verwenden Sie im Weiteren die differentielle Darstellung des Faraday'schen Induktionsgesetzes.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{3}$$

1. Zeigen Sie, dass $\vec{B}$ senkrecht auf $\vec{E}$ und ebenso senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung steht.

2. Zeigen Sie, dass $|\vec{E}| = c\vec{B}$ gilt.

3. Zeigen Sie, dass die elektrische gleich der magnetischen Energiedichte ist. Verwenden Sie hierzu $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$.

Losung

1.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\hat{e}_z \tag{4}$$

Faraday'sches Induktionsgesetzes

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[E_0 \cos\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\right]\hat{e}_y \\
&= -E_0 \cdot \left[-\sin\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \cdot \left(-\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right]\hat{e}_y \\
&= -\frac{2\pi}{\lambda} E_0 \sin\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\hat{e}_y 0 = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \int \frac{2\pi}{\lambda} E_0 \sin\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\hat{e}_y \mathrm{d}t \\
&= \frac{2\pi E_0}{\lambda}\frac{1}{2\pi f}\cos\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\hat{e}_y = \frac{E_0}{c}\cos\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\hat{e}_y
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \parallel \hat{e}_z, \vec{B} \parallel \hat{e}_y, \vec{k} \parallel \hat{e}_x \tag{7}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \cdot \vec{E} = 0, \vec{B} \cdot \vec{k} = 0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \perp \vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k} \tag{9}$$

Mit dem Propagationsvektor der Welle k.

2.

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{E_0}{E_0/c} = c \tag{10}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = c|\vec{B}| \tag{11}$$

3.

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 = \frac{\epsilon_0}{2}(cB)^2 = \frac{\epsilon_0 c^2}{2}B^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = w_{\mathrm{mag}} \tag{12}$$

6.2 Polarisation elektromagnetischer Wellen

Beschreiben Sie die Art der Polarisation für die ebenen elektromagnetischen Wellen, die durch die folgenden Gleichungen für das E-Feld beschrieben werden:

1. $E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)\,, \quad E_z = 4E_0 \sin(kx - \omega t)$
2. $E_y = -E_0 \cos(kx + \omega t)\,, \quad E_z = E_0 \sin(kx + \omega t)$
3. $E_y = 2E_0 \cos(kx - \omega t + \pi/2)\,, \quad E_z = -2E_0 \sin(kx - \omega t)$

Lösung

Für $x = 0$ ist die Art der Polarisation leicht zu erkennen:

1. $E_y = -E_0 \sin(\omega t)\,, \qquad E_z = -4E_0 \sin(\omega t)$
2. $E_y = -E_0 \cos(\omega t)\,, \qquad E_z = E_0 \sin(\omega t)$

3. $E_y = 2E_0 \sin(\omega t)$, $\quad E_z = 2E_0 \sin(\omega t)$

Dann kann das E-Feld als eine Funktion der Zeit skizziert werden und die Polarisation einfach abgelesen werden:

1. linear
2. zirkular
3. linear

6.3 Strahlungsdruck Raumschiff

Sie haben soeben ein Raumschiff mit Masse m entworfen, das durch die Kraft der Strahlungsintensität der Sonne beschleunigt wird, und zwar durch den Einfall von Sonnenlicht auf ein perfekt reflektierendes kreisrundes Segel, das der Sonne zugewandt ist. Die durchschnittliche Strahlungsintensität der Sonne beträgt P. Stellen Sie das Sonnenlicht als eine ebene elektromagnetische Welle dar, die in sich in $z-$Richtung fortbewegt:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_{x,0}\cos(kz - \omega t)\mathbf{e}_x \tag{13}$$

Die Gravitationskonstante ist G, die Sonnenmasse m_S und die Lichtgeschwindigkeit c. Ihre Antwort können Sie als abhängig von m, $\langle P \rangle$, c, m_S, G, k und ω ausdrücken.

1. Berechnen Sie das zugehörige Magnetfeld $\mathbf{B}$ dieses Feldes.
2. Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ dieser Welle. Berechnen Sie den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor $\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{S} dt$, wobei T die Schwingungsdauer ist. Bestimmen Sie die Amplitude des elektrischen Feldes zum Zeitpunkt $t = 0$.
3. Wie groß muss das Sonnensegel mindestens sein, um die Anziehungskraft der Sonne auszugleichen?

Lösung

1. Aufgrund von

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega}\mathbf{k} \times \mathbf{E} \tag{14}$$

(mit $\mathbf{E}(z,t) = E_{x,0}\cos(kz - \omega t)\mathbf{e}_x$) und $c = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|}$ ergibt sich für das zugehörige Magnetfeld:

$$\mathbf{B} = \frac{E_{x,0}}{c}\cos(kz - \omega t)\mathbf{e}_y \tag{15}$$

wobei für die Einheitsvektoren gilt:

$$(\pm\mathbf{e}_x) \times (\pm\mathbf{e}_y) = \mathbf{e}_z \tag{16}$$

2. Aus den Gleichungen (13) und (15) lässt sich der Poynting-Vektor berechnen:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\frac{E_{x,0}^2}{c}\cos^2(kz - \omega t)\mathbf{e}_z \tag{17}$$

Zeitlich gemittelt ergibt sich daraus

$$|\langle \mathbf{S} \rangle| = \frac{1}{2}\frac{E_{x,0}^2}{\mu_0 c} \tag{18}$$

Die Amplitude des elektrischen Feldes kann über die Strahlungsleistung ermittelt werden: Der Poynting-Vektor ist ein Maß für die Intensität der Welle; diese ist gleich der zeitlich gemittelten Gesamtstrahlungsleistung der Sonne $\langle P \rangle$, 'quadratisch verdünnt' über die Entfernung r:

$$\frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2} = |\langle \mathbf{S} \rangle| = \frac{1}{2}\frac{E_{x,0}^2}{\mu_0 c} \tag{19}$$

Also beträgt die Amplitude des elektrischen Feldes:

$$E_{x,0} = \left(\frac{2\langle P \rangle \mu_0 c}{4\pi r^2}\right)^{1/2} \tag{20}$$

3. Der Strahlungsdruck durch ein perfekt reflektierendes Segel ist gegeben durch

$$\langle p_{Strahl} \rangle = \frac{2\,|\langle \mathbf{S} \rangle|}{c} = \frac{\left|\left\langle \vec{F}_{Strahl} \right\rangle\right|}{A} \tag{21}$$

Der Faktor 2 ergibt sich aus der Tatsache, dass es sich hier um eine perfekte Reflexion handelt, nicht um eine Absorption; die Impulserhaltung muss beachtet werden.

Also ist dann die Kraft:

$$\left|\left\langle \vec{F}_{Strahl} \right\rangle\right| = \frac{2\,|\langle \mathbf{S} \rangle|}{c}A = \frac{2\langle P \rangle}{4\pi r^2 c}A \tag{22}$$

Aufgrund des Kräftegleichgewichts zwischen Strahlungskraft und Anziehungskraft der Sonne ist dann:

$$\left|\vec{F}_{Strahl}\right| = \left|\vec{F}_G\right| \tag{23}$$

$$\frac{2\langle P \rangle}{4\pi r^2 c}A_{min} = G\frac{mM_s}{r^2} \tag{24}$$

Zusammen mit der Beziehung $c = \frac{\omega}{k}$ ergibt sich dann für die Mindestfläche des Segels:

$$A_{min} = \frac{GmM_s 2\pi}{\langle P \rangle}\frac{\omega}{k} \tag{25}$$

7 Spezielle Relativitätstheorie

7.1 Nachricht an bewegtes Raumschiff

Zum Zeitpunkt $t = 0$ startet von der Erde (Ursprung des Bezugssystems S) ein Raumschiff mit der Geschwindigkeit $v = \frac{3}{5}c$. Die Erde funkt zum Zeitpunkt $\tau = 1\text{d}$ eine Nachricht an das Schiff.

1. Zeigen Sie: Wenn der Funkspruch empfangen wird, hat das Raumschiff im System S den Ort
$$x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}} \tag{26}$$
erreicht und es ist die Zeit
$$t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} \tag{27}$$
auf der Erde vergangen.

2. Bestimmen sie die Ankunftszeit des Funkspruchs, die von einer Uhr an Board des Schiffs gemessen wird.

Lösung

1. Im System S hat das Raumschiff den Ort
$$x_R = vt \tag{28}$$
Der Funkspruch hat dagegen den Ort (natürlich nur für $t > \tau$):
$$x_F = c(t - \tau) \tag{29}$$
Damit der Funkspruch das Schiff erreicht, muss $x_R = x_F$ gelten. Gleichsetzen der beiden Ausdrücken und auflösen nach t liefert:
$$t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{5}{2}\text{d} \tag{30}$$
Einsetzen in der ersten Gleichung liefert:
$$x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}} = 3,888 \cdot 10^{13}\text{m} \tag{31}$$

2. Die Ankunftszeit t' ist gemäß der Lorentz-Transformation
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{32}$$
$$= \gamma\left(\frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{v^2\tau}{c^2(1 - \frac{v}{c})}\right) \tag{33}$$
$$= \gamma\tau\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c}} \tag{34}$$
$$= \gamma\tau\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{5}{4}\frac{8}{5}\tau = 2\tau = 2\text{d} \tag{35}$$

7.2 Erde, Rakete, Meteor

Die Erde, eine bemannte Rakete und ein Meteor bewegen sich zufallig in die gleiche Richtung. An der Erde fliegt die Rakete mit einer von der Erde beobachteten Geschwindigkeit von $v_{E,R} = \frac{3}{4}c$ vorbei. An der Rakete fliegt der Meteor mit einer von der Raketenmannschaft beobachteten Geschwindigkeit von $v_{R,M} = \frac{1}{2}c$ vorbei.

1. Welche Geschwindigkeit hat der Meteor von der Erde aus beobachtet?

2. Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm für diese Situation aus der Sicht der Raketenbesatzung.

Lösung

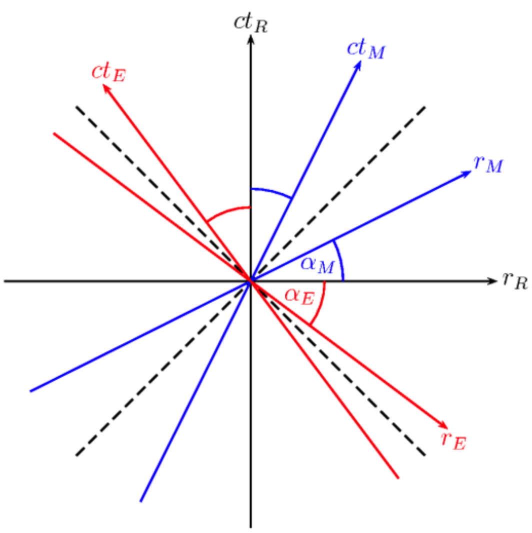
1. Die Geschwindigkeiten $v_{E,R}$ und $v_{R,M}$ müssen (relativistisch) addiert werden, da die jeweiligen Beobachter positive Geschwindigkeiten sehen, also

$$v_{E,M} = \frac{v_{E,R} + v_{R,M}}{1 + \frac{v_{E,R} v_{R,M}}{c^2}} = \frac{10}{11}c \tag{36}$$

2. Die Winkel im Minkowski-Diagramm ergeben sich zu

$$\alpha_M = \arctan\left(\frac{v_{R,M}}{c}\right) = 26,6^\circ \text{ und } \alpha_E = \arctan\left(-\frac{v_{E,R}}{c}\right) = -36,9^\circ \tag{37}$$

Da v für den Meteor positiv und für die Erde negativ ist, bewegen sich die Achsen auf die Winkelhalbierende zu, bzw. von ihr weg.



7.3 Lichtsignal Zeitdifferenz

Wir betrachten ein Raumschiff, dass sich mit hoher Geschwindigkeit von der Erde entfernt. Es sendet zwei Lichtsignale aus, zwischen denen die Zeit $\Delta t'$ (im Raumschiff gemessen) liegt. Zeigen Sie, dass die Zeit (auf der Erde gemessen) zwischen der Ankunft der beiden Signale auf der Erde gleich $\Delta T = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\Delta t'$ ist.

Lösung

Wir bezeichnen die Aussendung des ersten und zweiten Signals als Ereignis A und B. Im System S' des Raumschiffes haben wir also die Raum-Zeit-Koordinaten (x'_A, t'_A) beziehungsweise $(x'_B = x'_A, t'_B = t'_A + \Delta T')$. Im Ruhesystem der Erde S haben A und B die Koordinaten (x'_A, t'_A) beziehungsweise $(x'_B = x'_A + \Delta x, t'_B = t'_A + \Delta t)$. Die Transformation von S' nach S ist nun gegeben durch:

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'), \tag{38}$$

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \approx 2$ wobei $x = x'_A$ oder x'_B, etc. Somit haben wir:

$$x_A = \gamma(x'_A + vt'_A), \qquad t_A = \gamma(t'_A + \frac{v}{c^2}x'_A), \tag{39}$$

$$x_B = \gamma(x'_B + vt'_B), \qquad t_B = \gamma(t'_B + \frac{v}{c^2}x'_B), \tag{40}$$

und weiterhin, mit $x'_B - x'_A = 0$:

$$x_B - x_A = \Delta x = \gamma v \Delta t', \quad t_B - t_A = \Delta t = \gamma \Delta t', \tag{41}$$

In S (Erdsystem) liegen die beiden Signale also zeitlich um $\Delta t = \gamma \Delta t'$ auseinander. Während dieser Zeit legt das Raumschiff die Strecke Δx zurück. Die beiden Lichtsignale kommen im erdfesten Punkt x_0 zu den Zeiten T_A, beziehungsweise $T_B = T_A + \Delta T$ an. T_A und T_B lassen sich berechnen aus:

$$T_A = t_A + \frac{x_A - x_0}{c}, \quad T_B = t_B + \frac{x_B - x_0}{c}, \tag{42}$$

wobei $(x_A - x_0)/c$ und $(x_B - x_0)/c$ die Laufzeiten (im Erdsystem S) der Signale vom Punkt x_A beziehungsweise x_B zu x_0 sind. Somit ist:

$$T_B - T_A = \Delta T = t_B - t_A + \frac{(x_B - x_A)}{c} = \Delta t + \frac{\Delta x}{c}, \tag{43}$$

d.h. die gemessene Zeitdifferenz zwischen den beiden Signalen ist zusammen gesetzt aus der Zeitdifferenz Δt in S (zwischen dem Aussenden der Signale) und einer Laufzeit-Differenz. Mit den obigen Gleichungen erhalten wir für die gemessene Zeitdifferenz im System S:

$$\Delta T = \gamma(1 + v/c)\Delta t' = \frac{(1 + v/c)\Delta t'}{\sqrt{(1 + v/c)(1 - v/c)}} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}\Delta t' \tag{44}$$