Ferienkurs Experimentalphysik 2

Lösung zum Übungsblatt 3:

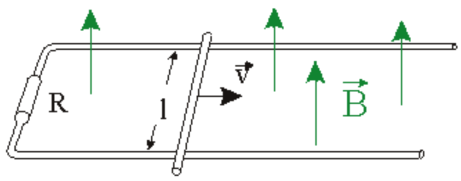
Zeitlich veränderliche Felder und Wechselstromkreise

Tutoren: Katharina Hirschmann und Gabriele Semino

4 Zeitlich veränderliche Felder

4.1 Induktion im Drahtrahmen

Ein waagrecht angeordneter und auf der rechten Seite offener Drahtrahmen der Breite $l = 10\text{cm}$ wird von einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte $B = 0,90\text{T}$ senkrecht durchsetzt (s. Abbildung). Ein Leiterstück liegt auf dem Drahtrahmen und wird durch eine äußere Kraft F mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 25\text{cm/s}$ nach rechts bewegt. Der Widerstand im linken Teil des Drahtbügels besitzt den Wert $R = 0,50\Omega$, der Widerstand des restlichen Drahtbügels und des Leiterstücks sowie Kontaktwiderstände sind vernachlässigbar.



1. Bestimmen Sie unter Verwendung des Induktionsgesetzes die Spannung U_i, die zwischen den beiden Auflagepunkten des Leiterstücks induziert wird, sowie die Stärke I des im geschlossenen Kreis fließenden Stroms.

2. Berechnen Sie die Kraft F, mit der am Leiterstück gezogen werden muss. Reibungskräfte sollen unberücksichtigt bleiben.

3. Bestimmen Sie die mechanische Arbeit W_m, die während der Zeitspanne $\Delta t = 10\text{s}$ verrichtet wird und die im Widerstand R umgesetzte elektrische Energie ΔW_{el} für diese Zeitspanne unter Verwendung der Ergebnisse der vorigen Teilaufgaben. Vergleichen Sie die beiden Werte und interpretieren Sie das Ergebnis.

4. Der sich mit $v_0 = 25\text{cm/s}$ bewegende Leiter wird nun ($t = 0\text{s}$) losgelassen. Bestimmen Sie $v(t)$ und skizzieren Sie die zugehörige Funktion.

Lösung

1. Induktionsgesetz

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_A \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Blx) = -Blv = -22,5\mathrm{mV} \tag{1}$$

   Ohm'sches Gesetz

$$I = \frac{U_i}{R} = -45\mathrm{mA} \tag{2}$$

2. Lorentzkraft auf einem Leiter

$$F = IlB = -4,05\mathrm{mN} \tag{3}$$

3. Einsetzen der Definition von Arbeit liefert:

$$W_m = \int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int \vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t = Fv\Delta t = -10,1\mathrm{mJ} \tag{4}$$

$$W_{el} = \int P\,\mathrm{d}t = U_i I \Delta t = 10,1\mathrm{mJ} \tag{5}$$

   Die zwei Werte sind betragsmäßig gleich, da beim betrachteten Vorgang mechanische Arbeit am Widerstand in Wärme umgewandelt wird (Energieerhaltung).

4. Einsetzen von Gleichung 1 und 2 in 3

$$F = IlB = \frac{U_i}{R}lB = \frac{-Blv}{R}lB = -\frac{B^2l^2v}{R} \tag{6}$$

   Aufstellen der Bewegungsgleichung mit Hilfe vom 2. Newton'sches Gesetzt.

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2l^2}{R}v \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2l^2}{mR}v = -Cv \tag{7}$$

   Lösen der Bwgl. mit einem Exponentialansatz oder Trennung der Variablen.

$$v(t) = v_0 e^{-Ct} \qquad \text{mit} \qquad C = \frac{B^2l^2}{mR} \tag{8}$$

   mit $v_0 = 25\mathrm{cm/s}$.

4.2 Drahtschleife

Eine quadratische, ebene Drahtschleife (Seitenlänge $l = 1\mathrm{m}$, Windungszahl $n = 10$) liege in einem homogenen Magnetfeld ($|\vec{B}| = 0,6\mathrm{V\,s/m^2}$); die Richtung der magnetischen Induktion stehe senkrecht auf der Fläche der Schleife. Eine Seite der Schleife falle mit dem Magnetfeldrand zusammen. Die Schleife werde nun mit der konstanten Beschleunigung $|\vec{a}| = 2\mathrm{m/s^2}$ aus dem Feld herausgezogen. Die Richtung der Beschleunigung liege in der Schleifenebene und stehe senkrecht zur Begrenzung des Feldes. Welche Wärmemenge W wird insgesamt in dem an die Schleife angeschlossenen Widerstand $R = 6\Omega$ erzeugt?

Lösung

Die Schleife wird mit der konstanten Beschleunigung a aus dem Magnetfeld gezogen. Die vom Magnetfeld durchflossene Fläche A nimmt somit um $\mathrm{d}A = l\mathrm{d}x$ ab. Die Bewegungsgleichungen der gleichmäßig beschleunigten Schleife lauten

$$x(t) = l - \frac{1}{2}at^2 \qquad v(t) = -at \tag{9}$$

Sei T die Zeit, bei der die Schleife das Magnetfeld völlig verlassen hat, so gilt

$$x(T) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{2l}{a}} \tag{10}$$

Bei konstantem Magnetfeld ergibt sich die induzierte Spannung zu

$$U_{\text{ind}}(t) = -n\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = -nB\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = -nBl\underbrace{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}}_{v(t)=-at} = nBlat \tag{11}$$

Die elektrische Leistung ist definiert durch $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$:

$$P(t) = \frac{1}{R}U_{\text{ind}}(t)^2 \tag{12}$$

$$\mathrm{d}W = P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{R}U_{\text{ind}}(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{n^2B^2l^2a^2}{R}t^2\,\mathrm{d}t \tag{13}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{n^2B^2l^2a^2}{R}\int_0^T t^2\,\mathrm{d}t = \frac{n^2B^2l^2a^2}{R}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^T = \frac{n^2B^2l^2a^2}{3R}T^3 \\ &= \frac{n^2B^2l^2a^2}{3R}\left(\frac{2l}{a}\right)^{3/2} = \frac{2n^2B^2}{3R}\sqrt{2al^7} = 8\mathrm{J} \end{aligned} \tag{14}$$

4.3 Exponentielles Magnetfeld in Metallring

Ein Metallring mit Radius $r = 10\mathrm{cm}$ wird in ein räumlich homogenes Magnetfeld gehalten, wobei die Normale des Kreisrings parallel zum Magnetfeld $\vec{B}$ gerichtet ist. Der Widerstand des Metallrings beträgt $R = 0,1\Omega$. Das Magnetfeld hat die Zeitabhängigkeit $B = B_0 \exp(-t/\tau)$ mit $B_0 = 1,5\mathrm{T}$ und $\tau = 3\mathrm{s}$.

1. Geben Sie einen Ausdruck für den magnetischen Fluss durch den Metallring als Funktion der Zeit an.

2. Geben Sie einen Ausdruck für die im Metallring induzierte Spannung als Funktion der Zeit an.

3. Wie groß ist die maximale induzierte Spannung?

4. Der Ring wird nun geschlossen. Berechnen Sie den durch den Ring fließenden Strom. Wie groß ist der maximale Wert?

5. In welcher Richtung fließt der Strom? Markieren Sie diese in einer von Ihnen angefertigten Zeichnung des Versuchsaufbaus und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

1. $$\Phi(t) = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \pi r^2 B_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{15}$$

2. $$U_{ind}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\pi r^2 B_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] = \frac{\pi r^2 B_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{16}$$

3. Die maximale Spannung liegt vor für $t = 0$:
$$U_{max} = U_{ind}(t = 0) = 16\text{mV} \tag{17}$$

4. $$I(t) = \frac{U_{ind}(t)}{R} = \frac{\pi r^2 B_0}{\tau R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{18}$$
$$I_{max} = I(t = 0) = 0,16\text{A} \tag{19}$$

5. Der Strom wirkt der Schwächung von $\vec{B}$ entgegen (Lenz'sche Regel) und fließt bei einem aus dem Blatt schauenden B-Feld gegen den Uhrzeigersinn.

5 Wechselstromkreise

5.1 Differentialgleichungen von Schaltungen

Eine Wechselspannungsquelle liefert die Effektivspannung $U = 6$ V mit der Frequenz $\nu = 50$Hz ($\omega = 2\pi\nu$). Zunächst wird ein Kondensator der Kapazität C angeschlossen und es fließt ein Effektivstrom $I_1 = 96$ mA. Dann wird statt des Kondensators eine Spule mit Induktivität L und Ohmschen Widerstand R angeschlossen, der Effektivstrom beträgt dann $I_2 = 34$ mA. Schließlich werden Kondensator und Spule hintereinandergeschaltet und es fließen $I_3 = 46$ mA.

1. Setzen Sie die Spannung der Stromquelle in komplexer Form als $U(t) = \hat{U}e^{i\omega t}$ an und leiten Sie aus den Differentialgleichungen allgemein den Scheinwiderstand (d.h. den Absolutbetrag des komplexen Widerstandes) her von:
   (a) einer Kapazität C,
   (b) einer reinen Induktivität L,
   (c) einer Spule mit L und R,
   (d) einer Reihenschaltung aus einer Kapazität C und einer Spule mit L und R.
2. Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators sowie die Induktivität und den Ohmschen Widerstand der Spule aus den oben angegebenen experimentellen Werten.

Lösung

1. (a) Für die reine Kapazität gilt die Gleichung

$$\frac{1}{C}Q = U(t) \tag{20}$$

$U(t)$ ist nun eine Oszillation $U(t) = \hat{U}e^{i\omega t}$ und für $I(t)$ machen wir den Ansatz $I(t) = \hat{I}e^{i\omega t}$. Ableiten der Gleichung nach t führt dann auf

$$\frac{1}{C}\hat{I}e^{i\omega t} = \hat{U}i\omega e^{i\omega t} \tag{21}$$

also

$$\hat{I} = i\omega C\hat{U} \tag{22}$$

Somit ist der komplexe Widerstand

$$Z_C = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{i\omega C} \tag{23}$$

und der Scheinwiderstand

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C} \tag{24}$$

(b) Für die reine Induktivität gilt die Differentialgleichung

$$L\dot{I} = U(t) \tag{25}$$

$U(t)$ ist nun eine Oszillation $U(t) = \hat{U}e^{i\omega t}$ und für $I(t)$ machen wir den Ansatz $I(t) = \hat{I}e^{i\omega t}$. Das führt auf

$$i\omega L\hat{I}e^{i\omega t} = \hat{U}e^{i\omega t} \tag{26}$$

also

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{i\omega L} \tag{27}$$

Somit ist der komplexe Widerstand

$$Z_L = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = i\omega L \tag{28}$$

und der Scheinwiderstand

$$|Z_L| = \omega L \tag{29}$$

(c) Für L und R gilt die Differentialgleichung

$$L\dot{I} + RI = U(t) \tag{30}$$

$U(t)$ ist nun eine Oszillation $U(t) = \hat{U}e^{i\omega t}$ und für $I(t)$ machen wir (im eingeschwungenen Zustand) den Ansatz $I(t) = \hat{I}e^{i\omega' t}$. Das führt dann auf

$$Li\omega'\hat{I}e^{i\omega' t} + R\hat{I}e^{i\omega' t} = \hat{U}e^{i\omega t} \tag{31}$$

Division durch $e^{i\omega' t}$ ergibt

$$Li\omega'\hat{I} + R\hat{I} = \hat{U}e^{i(\omega-\omega')t} \tag{32}$$

Da auf der linken Seite eine Konstante steht, kann diese Gleichung für alle t nur dann gelten, wenn die rechte Seite auch konstant ist, d.h. wenn $\omega = \omega'$. Damit folgt

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{i\omega L + R} \tag{33}$$

Somit ist der komplexe Widerstand

$$Z_{LR} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = i\omega L + R \tag{34}$$

und der Scheinwiderstand

$$|Z_{LR}| = \sqrt{\omega^2 L^2 + R^2} \tag{35}$$

(d) Für L, R und C in Reihe gilt die Differentialgleichung

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}Q = U(t) \tag{36}$$

$U(t)$ ist nun eine Oszillation $U(t) = \hat{U}e^{i\omega t}$ und für $I(t)$ machen wir (im eingeschwungenen Zustand) den Ansatz $I(t) = \hat{I}e^{i\omega' t}$. Ableiten der Differentialgleichung nach t und Einsetzen des Ansatzes führt dann auf

$$-L\omega'^2\hat{I}e^{i\omega' t} + Ri\omega'\hat{I}e^{i\omega' t} + \frac{1}{C}\hat{I}e^{i\omega' t} = \hat{U}i\omega e^{i\omega t} \tag{37}$$

Division durch $e^{i\omega' t}$ ergibt

$$-L\omega'^2\hat{I} + Ri\omega'\hat{I} + \frac{1}{C}\hat{I} = \hat{U}i\omega e^{i(\omega-\omega')t} \tag{38}$$

Da auf der linken Seite eine Konstante steht, kann diese Gleichung für alle t nur dann gelten, wenn die rechte Seite auch konstant ist, d.h. wenn $\omega' = \omega$. Damit folgt:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \tag{39}$$

Somit ist der komplexe Widerstand

$$Z_{LRC} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{40}$$

und der Scheinwiderstand

$$|Z_{LRC}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{41}$$

2. Es gilt

$$I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\hat{I}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{|Z_C|}\left|\hat{U}\right| = \frac{1}{|Z_C|}U_{eff} \tag{42}$$

also

$$|Z_C| = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} \tag{43}$$

Da andererseits

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C} \tag{44}$$

folgt also

$$C = \frac{1}{\omega}\frac{I_{eff}}{U_{eff}} = \frac{1}{\omega}\frac{I_1}{U} = 50.9\mu\text{F} \tag{45}$$

Um die Induktivität und den Widerstand der Spule zu berechnen, bestimmt man zuerst aus den experimentellen Werten die Scheinwiderstände:

$$|Z_{LR}| = \frac{U}{I_2} = 176.5\Omega \tag{46}$$

$$|Z_{LRC}| = \frac{U}{I_3} = 130.4\Omega \tag{47}$$

Damit werden nun

$$|Z_{LR}| = \sqrt{\omega^2 L^2 + R^2} \tag{48}$$

$$|Z_{LRC}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{49}$$

zu zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten R, L. Quadrieren und Subtraktion ergibt eine Gleichung für L mit der Lösung

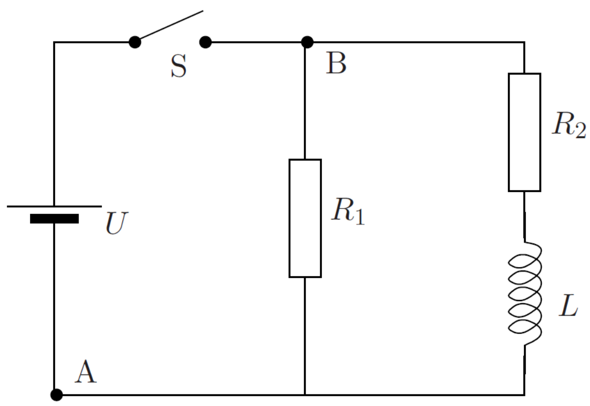
$$L = \frac{C}{2}\left(|Z_{LR}|^2 - |Z_{LRC}|^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right) = 0.46\text{H} \tag{50}$$

R folgt dann mit

$$R = \sqrt{|Z_{LR}|^2 - \omega^2 L^2} = 101.4\Omega \tag{51}$$

5.2 Induktivität

Betrachten Sie den abgebildeten Stromkreis aus einer Gleichspannungsquelle $U = 10$V, einer Induktivität $L = 0,1$H und zwei Widerständen $R_1 = 50\Omega$ und $R_2 = 150\Omega$.



1. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S geschlossen. Bestimmen Sie die Ströme I_1 und I_2 in den beiden Ästen des Stromkreises als Funktionen von t.

2. Nachdem sich der stationäre Zustand eingestellt hat, wird der Schalter wieder geöffnet. Wie groß ist die Spannung zwischen den Punkten A und B als Funktionen der Zeit und wie groß ist ihr Maximum? Wie groß wäre die Maximalspannung zwischen A und B, wenn $R_1 = 500\Omega$ wäre?

   Hinweis

   Überlegen Sie sich, wodurch unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters die Stromstärke im verbleibenden Stromkreis festgelegt wird.

Lösung

1. Die beiden Äste sind parallel an die Spannung U angeschlossen. Für die Stromstärken I_1 und I_2 gilt dann:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 &= U \\ L\dot{I}_1 + R_2 I_2 &= U \end{aligned}$$

   Die erste Gleichung legt I_1 sofort fest

$$I_1(t) = \frac{U}{R_1}$$

   Die zweite Gleichung ist eine DGL für I_2 mit der Lösung

$$I_2(t) = \frac{U}{R_2} + Ae^{-\frac{R_2 t}{L}}$$

   Einarbeitung der Anfangsbedingung $I_2(0) = 0$ legt die Inetgrationskontante A fest:

$$I_2(0) = \frac{U}{R_2} + A = 0 \Rightarrow A = -\frac{U}{R_2}$$

   also

$$I_2(t) = \frac{U}{R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_2 t}{L}}\right)$$

2. Durch das Öffnen des Schalters wird der aus L, R_1 und R_2 bestehende *Reststromkreis* isoliert. In den beiden Ästen dieses Kreises fließen aufgrund der Vorgeschichte im ersten Augenblick nach dem Ausschalten unterschiedliche Stromstärken. Allerdings ist das hier kein Problem, da der Ast 2 eine Induktivität hat (wirkt analog zu einer mechanischen Trägheit) und der Ast 1 nicht. Daher wird sich der Strom durch den Ast 1 instantan an den Strom im Ast 2 anpassen, also vom Wert $I_1 = \frac{U}{R_1}$ auf den Wert $I_2(\infty) = \frac{U}{R_2}$ springen. Der Anfangsstrom im Reststromkreis ist also $I = \frac{U}{R_2}$.

   Die weitere zeitliche Entwicklung des Stroms I gehorcht dann der DGL

$$L\dot{I} + (R_1 + R_2)I = 0$$

   also

$$I(t) = \frac{U}{R_2}e^{-(R_1+R_2)\frac{t}{L}}$$

wobei die Anfangsbedingung zum neuen Zeitpunkt $t = 0$ (Öffnen des Schalters) schon eingearbeitet wurde. Aus dem Strom ergibt sich die gesuchte Spannung am Widerstand R_1:

$$U_1(t) = R_1 I(t) = \frac{UR_1}{R_2} e^{-\frac{(R_1+R_2)t}{L}}$$

Die Maximalspannung wird direkt nach dem Öffnen erreicht und beträgt

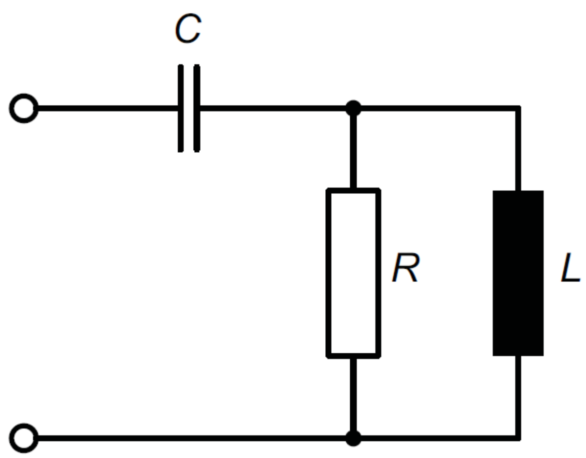
$$U_{1,\text{ max}} = \frac{UR_1}{R_2} = 3,33\text{V}$$

Wäre der Widerstand $R_1 = 500\Omega$, dann wäre die Maximalspannung zehnmal so groß, also

$$U_{1,\text{ max}} = 33,3\text{V}$$

Offenbar kann man aus der Originalspannung $U = 10\text{V}$ durch genügend große Wahl von R_1 eine beliebig große Spannungsspitze erzeigen - die aber umso schneller abklingt, je höher sie ist, so dass man hier keine Energie aus dem Nichts erzeugt.

5.3 Komplexe Widerstände



1. Zwei Kondensatoren werden in Reihe geschaltet. Geben Sie deren Gesamtkapazität an.

2. Jetzt wird der zweite Kondensator durch einen Widerstand und eine Spule ersetzt (siehe Abbildung). Die angegebene Schaltung ist an eine sinusförmige Spannung $U(t)$ mit der Amplitude U_0 und der Kreisfrequenz ω angeschlossen. Wie groß sind Real- und Imaginärteil der gesamten Impedanz der Schaltung? Das Problem lässt sich in zwei Zwischenschritten lösen.

3. Geben Sie für die Werte $U_0 = 1,2\text{V}, \omega = 9,42 \cdot 10^4 1/\text{s}, C = 0,22\text{nF}, R = 68\text{k}\Omega$ und $L = 0,47\text{H}$ den durch C fließenden Strom I_C über seine Amplitude und Phase bezüglich der Spannung $U(t)$ an.

Lösung

1. Die Gesamtkapazität zweier serieller Kondensatoren ist:
$$\frac{1}{C_{Ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

2. Es gilt
$$\begin{aligned} Z &= -i\frac{1}{\omega C} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}\right)^{-1} = -i\frac{1}{\omega C} + \frac{i\omega LR}{i\omega L + R} \\ &= -i\frac{1}{\omega C} + \frac{i\omega LR}{R + i\omega L}\frac{R - i\omega L}{R - i\omega L} = -i\frac{1}{\omega C} + \frac{i\omega LR^2 + \omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad (52) \\ \mathrm{Re}(Z) &= \frac{\omega^2 L^2 R}{\omega^2 L^2 + R^2} = \frac{R}{1 + (\frac{R}{\omega L})^2} \qquad (53) \\ \mathrm{Im}(Z) &= -\frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L R^2}{\omega^2 L^2 + R^2} = -\frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L}{(\frac{\omega L}{R})^2 + 1} \qquad (54) \end{aligned}$$

3. Es gilt $\omega L = 9,42 \cdot 10^4 1/\mathrm{s} \cdot 0,47\mathrm{H} = 44274\Omega$, also gilt
$$\mathrm{Re}(Z) = 20,24\mathrm{k}\Omega \qquad (55)$$
$$\mathrm{Im}(Z) = -17,16\mathrm{k}\Omega \qquad (56)$$
Und es folgt
$$|I_C| = \frac{U_0}{|Z|} = \frac{U_0}{\sqrt{\mathrm{Re}^2(Z) + \mathrm{Im}^2(Z)}} = 4,52 \cdot 10^{-5}\mathrm{A} = 45,2\mu\mathrm{A} \qquad (57)$$
Es gilt des weiteren
$$Z = |Z| \exp(i\varphi_Z) \qquad (58)$$
$$\varphi_Z = \arctan\frac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Re}(Z)} = -40.3° \qquad (59)$$
$$I_C = |I_C| \exp(i(\omega t + \varphi)) = \frac{U_0}{|Z|} | \exp(i(\omega t - \varphi_Z)) \qquad (60)$$
Also $\varphi = -\varphi_Z = 40.3°$.

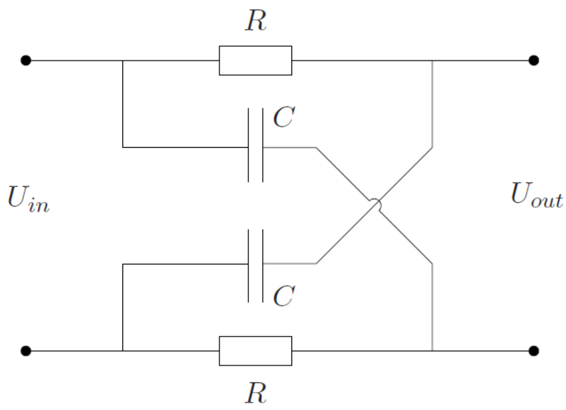
5.4 Allpass-Filter

In der folgenden Abbildung ist ein sogenannter Allpass-Filter dargestellt:

1. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(\omega) = \hat{U}_{out}/\hat{U}_{in}$.

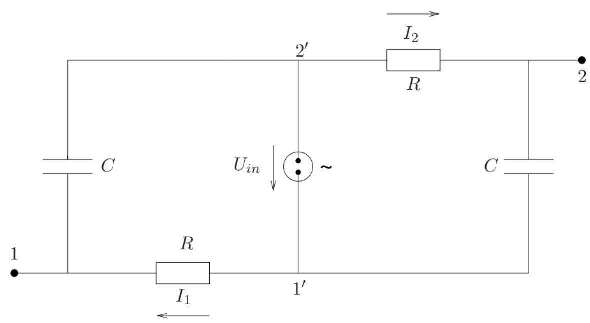
   Hinweis: Durch genaues Hinsehen erkennt man, dass die Schaltung auch in einer etwas einfacheren Form gezeichnet werden kann. Verwenden Sie den komplexen Ansatz $U_{\mathrm{in}}(t) = \hat{U}_{\mathrm{in}} e^{i\omega t}$ und rechnen Sie mit komplexen Widerständen, um die komplexen Amplituden $\hat{I}_1$ und $\hat{I}_2$ der Ströme $I_1(t) = \hat{I}_1 e^{i\omega t}$ und $I_2(t) = \hat{I}_2 e^{i\omega t}$ und daraus $\hat{U}_{\mathrm{out}}$ zu bestimmen. Das Endergebnis lautet: $H(\omega) = (1 - i\omega RC)/(1 + i\omega RC)$.

2. Wie groß ist der Verstärkungsfaktor und die Phasenverschiebung als Funktionen von ω? Warum heißt die Schaltung 'Allpass-Filter'?



Lösung

1. Durch genaues Hinsehen erkennt man, dass sich der Allpass-Filter auch in der folgenden Form darstellen lässt: Es handelt sich also um zwei identische ungekoppelte



$RC-$Schaltungen, die an die gemeinsame Wechselspannungsquelle $U_{\text{in}}(t)$ angeschlossen sind, wobei die Ausgangsspannung $U_{\text{out}}(t)$ zwischen den markierten Punkten 1 und 2 abgegriffen wird. Außerdem sind die positiven Richtungskonventionen für I_1 und I_2 eingezeichnet, ebenso die positive Richtung für die Eingangsspannung. $U_{\text{in}}(t)$ soll also positives Vorzeichen haben, wenn sie an der Pfeilspitze positives und am Pfeilende negatives Potential erzeugt. D.h. der Pfeil gibt die Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger durch die Spannungsquelle an. (Beliebige andere Konventionen sind möglich, müssen aber konsistent durchgehalten werden.)

Dann ergibt sich die komplexe Amplitude $\hat{I}_1$ aus der komplexen Amplitude $\hat{U}_{\text{in}}$ per

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} \hat{U}_{\text{in}} \tag{61}$$

denn bei der Reihenschaltung von R und C addieren sich deren komplexe Widerstände. Vorzeichenmäßig ist das korrekt, wie man aus dem Spezialfall ohne Kondensator (also $C = \infty$) erkennt. Für $\hat{I}_2$ gilt entsprechend

$$\hat{I}_2 = -\frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} \hat{U}_{\text{in}} \tag{62}$$

Das negative Vorzeichen ist korrekt, wie man wieder sieht, wenn man den Spezialfall ohne Kondensator betrachtet.

Wegen

$$U_{\text{out}} = \phi_1 - \phi_2 = \underbrace{\phi_1 - \phi_{1'}}_{-RI_1} + \underbrace{\phi_{1'} - \phi_{2'}}_{-U_{in}} + \underbrace{\phi_{2'} - \phi_2}_{RI_2} = U_{\text{in}} - RI_1 + RI_2 \tag{63}$$

ist die gesuchte komplexe Amplitude $\hat{U}_{out}$ der Ausgangsspannung also

$$\hat{U}_{\text{out}} = \hat{U}_{in} - R\hat{I}_1 + R\hat{I}_2 \tag{64}$$

Setzt man hier nun die oben bestimmten $\hat{I}_1$ und $\hat{I}_2$ ein, dann folgt

$$\hat{U}_{\text{out}} = \hat{U}_{\text{in}} - R\frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}}\hat{U}_{\text{in}} + R\left(-\frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}}\hat{U}_{\text{in}}\right) = \left(1 - \frac{2R}{R + \frac{1}{i\omega C}}\right)\hat{U}_{\text{in}} \tag{65}$$

Hieraus kann man die Übertragungsfunktion ablesen

$$H(\omega) = 1 - \frac{2R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \tag{66}$$

die sich allerdings noch in eine elegantere Form bringen lässt:

$$1 - \frac{2R}{R + \frac{1}{i\omega C}} = 1 - \frac{2i\omega RC}{i\omega RC + 1} = \frac{1 + i\omega RC - 2i\omega RC}{1 + i\omega RC} = \frac{1 - i\omega RC}{1 + i\omega RC} \tag{67}$$

Also im Ganzen

$$H(\omega) = \frac{1 - i\omega RC}{1 + i\omega RC} \tag{68}$$

2. Der Verstärkungsfaktor ist das Verhältnis der reellen Amplitude von Ausgangs- und Eingangsspannung

$$V = \frac{\left|\hat{U}_{\text{out}}\right|}{\left|\hat{U}_{\text{in}}\right|} \tag{69}$$

also einfach der Betrag der Übertragungsfunktion $V = |H(\omega)|$. Im betrachteten Fall ist

$$|H(\omega)| = \left|\frac{1 - i\omega RC}{1 + i\omega RC}\right| = \frac{1 + \omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = 1 \tag{70}$$

Die Phasenverschiebung zwischen $U_{\text{in}}(t)$ und $U_{\text{out}}(t)$ ist entsprechend die komplexe Phase der Übertragungsfunktion. Die berechnet man am einfachsten, indem ma8n die Darstellung $1 + i\omega RC = re^{i\omega}$ benutzt:

$$H(\omega) = \frac{1 - i\omega RC}{1 + i\omega RC} = \frac{re^{-i\phi}}{re^{i\phi}} = e^{-2i\phi} \tag{71}$$

$H(\omega)$ ist also ein reiner Phasenfaktor (klar, denn $|H(\omega)| = 1$). Für den Phasenwinkel ϕ gilt aufgrund seiner Definition:

$$re^{i\phi} = 1 + i\omega RC \;\; \rightarrow \;\; \phi = \arctan(\omega RC) \tag{72}$$

Also ist die gesuchte Phasenverschiebung zwischen $U_{\text{in}}(t)$ und $U_{\text{out}}(t)$

$$\Delta\phi = -2\phi = -2\arctan(\omega RC) \tag{73}$$

Der Allpass-Filter erzeugt also ein Ausgangssignal, dessen (reelle) Amplitude für alle Frequenzen mit der (reellen) Amplitude des Eingangssignals übereinstimmt, das aber eine frequenzabhängige Phasenverschiebung aufweist. Daher der Name 'Allpass-Filter'.