Ferienkurs Experimentalphysik 2

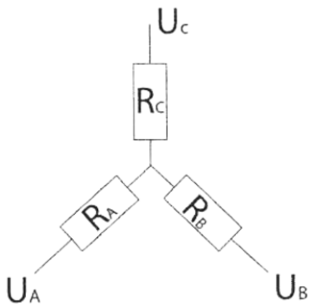
Lösung zum Übungsblatt 2: Elektrischer Strom und Magnetostatik

Tutoren: Katharina Hirschmann und Gabriele Semino

2 Elektrischer Strom

2.1 Widerstandsnetzwerk

Gegeben sei die folgende Schaltung. Es liegen die Potentiale $U_A = 10\,\mathrm{V}, U_B = 20\,\mathrm{V}, U_C = 30\,\mathrm{V}$ an den Eckpunkten A, B, C an. Die Widerstände seien $R_A = 1\,\mathrm{k\Omega}, R_B = 1.5\,\mathrm{k\Omega}, R_C = 3\,\mathrm{k\Omega}$. Bestimmen Sie die Stromflüsse I_A, I_B, I_C durch die drei Widerstände.



Lösung

Das Potential U am Kreuzpunkt ist zunächst unbekannt. Die Ströme, die in den Kreuzpunkt einfließen, sind

$$I_A = \frac{U - U_A}{R_A}, \text{ etc.} \tag{1}$$

Also haben wir

$$I_A + I_B + I_C = 0 = \frac{U - U_A}{R_A} + \frac{U - U_B}{R_B} + \frac{U - U_C}{R_C} \tag{2}$$

$$U\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right) = \frac{U_A}{R_A} + \frac{U_B}{R_B} + \frac{U_C}{R_C} \tag{3}$$

$$U = \frac{\frac{U_A}{R_A} + \frac{U_B}{R_B} + \frac{U_C}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}} = \frac{33,3mA}{2(k\Omega)^{-1}} = 16,67V \tag{4}$$

$$I_A = \frac{U - U_A}{R_A} = 6,66mA \tag{5}$$

$$I_B = \frac{U - U_B}{R_B} = -2,22mA \tag{6}$$

$$I_C = \frac{U - U_C}{R_C} = -4,44mA \tag{7}$$

Also $I_A + I_B + I_C = 0$.

2.2 Stromdichte und Ampere'sches Gesetz

Ein Kupferrohr (Hohlzylinder) mit Innenradius $r_i = 0,4$ cm, Außenradius $r_a = 0,5$ cm und Länge $l = 5$ m wird mit den Enden an eine Spannungsquelle mit $U = 6$ V angeschlossen. Der spezifische Widerstand von Kupfer beträgt bei Raumtemperatur etwa $\rho = 1,72 \cdot 10^{-2}\ \frac{\Omega\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$.

1. Berechnen Sie die Stromdichte $j = |\vec{j}|$ und den Gesamtstrom I.

2. Berechnen Sie mit dem Ampere'schen Gesetz das Magnetfeld in allen relevanten Bereichen. Verwenden Sie dabei die Idealisierung $l \to \infty$.

Lösung

1. Es gilt für den Widerstand R des Kupferkabels:

$$R = \rho\frac{l}{A} = \rho\frac{l}{\pi\left(r_a^2 - r_i^2\right)} = 3,04 \cdot 10^{-3}\Omega \tag{8}$$

$$\Rightarrow I = \frac{U}{R} = 1,97 \cdot 10^3\mathrm{A} \tag{9}$$

$$\Rightarrow j = \frac{I}{A} = 6,98 \cdot 10^7\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2} \tag{10}$$

2. Das Amperesche Gesetz lautet:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \tag{11}$$

Wir wählen als Fläche A eine Kreisfläche mit Radius r. Also erhalten wir für die linke Seite wegen $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$ in allen Fällen

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(r)2\pi r \tag{12}$$

Für die rechte Seite gilt immer $\vec{j} \parallel d\vec{A}$, jedoch benötigen wir eine Fallunterscheidung:

$r < r_i$:

$$\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{13}$$

$$\Rightarrow B(r) = 0 \tag{14}$$

$r_i < r < r_a$:

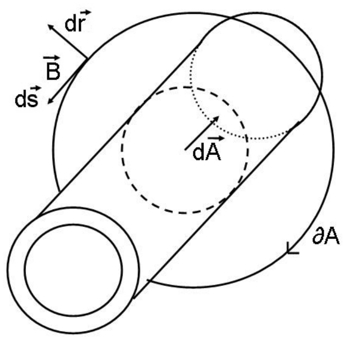
$$\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = j\pi \left(r^2 - r_i^2\right) \tag{15}$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 j\pi \left(r^2 - r_i^2\right)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j}{2}\left(r - \frac{r_i^2}{r}\right) \tag{16}$$

$r_a < r$

$$\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = I \tag{17}$$

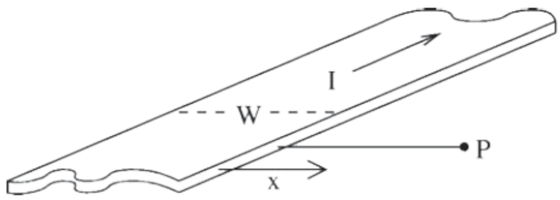
$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{18}$$

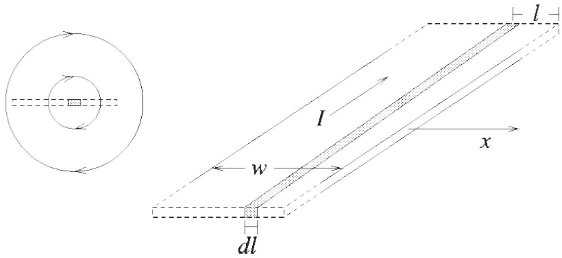


3 Magnetostatik

3.1 Magnetisches Feld eines leitenden Bandes

Ein dünnes, flaches, unendlich langes Band der Weite W transportiert einen gleichmäßigen Strom I. Bestimmen Sie das magnetische Feld an einem Punkt P, der sich in der Ebene des Bandes befindet und einen Abstand x von dessen Rand hat. Überlegen Sie sich das Feld eines Streifens. Wie sieht das Ergebnis für den Limes $W \to 0$ aus? (Hinweis: $\ln(1+\delta) \approx \delta$ für kleine δ).





Lösung

Wir unterteilen das Band in infinitesimale Streifen, die sich wie Drähte verhalten und die wir nach dem Prinzip der Superposition als Vektorsumme zusammenfassen können. Betrachte einen Streifen der Weite dl, der eine Strecke l vom rechten Rand des Bandes entfernt ist. Der Streifen trägt den Strom Idl/W und hat eine Entfernung von $l + x$ zum Punkte P. Der differentielle Beitrag zum magnetischen Feld ist:

$$dB = \frac{\mu_0 I \frac{dl}{W}}{2\pi(x+l)} \tag{19}$$

mit dem Feld im Uhrzeigersinn zeigend. Um das gesamte Feld zu bekommen integrieren wir über das gesamte Band von $l = 0$ bis $l = W$ (Substitution: $u = x + l, du = dl$):

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi W} \int_0^W \frac{dl}{x+l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi W} \int_x^{x+W} \frac{du}{u} = \frac{\mu_0 I}{2\pi W} \ln\left(1 + \frac{W}{x}\right) \tag{20}$$

Um den Limes zu betrachten taylorn wir das Ergebnis. Für $W \to 0$ wird $\ln(1+\delta) \approx \delta$ deshalb

$$B \to \frac{\mu_0 I}{2\pi W}\left(\frac{W}{x}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \tag{21}$$

Was die Formel für einen stromdurchflossenen Draht ist.

3.2 Dipol- und Drehmoment

Ein dünner, nicht leitender Stab der Länge $l = 28mm$ trage eine gleichmäßig über seine Länge verteilte Ladung Q. Er rotiere mit einer Kreisfrequenz $\omega = 1920s^{-1}$ um eine senkrecht zu seiner Längsachse durch eins seiner Enden gehende Achse und erzeuge dadurch ein magnetisches Dipolmoment $\vec{m} = 2,17 \cdot 10^{-10} Am^2$.

1. Wie ist das magnetische Dipolmoment definiert?

2. Wie groß ist die Ladung Q?

3. Wie groß ist der Betrag des auf den magnetischen Dipol wirkenden Drehmoments in einem Magnetfeld mit der Flussdichte $\vec{B} = 0,322$ T, das unter einem Winkel von $68°$ zum Vektor des Dipolmoments steht?

Lösung

1. $$\vec{m} = I \cdot \vec{A} \tag{22}$$

2. Hier gilt

$$dm = AdI = \pi r^2 \frac{\omega}{2\pi} dQ = r^2 \frac{\omega}{2} \frac{Q}{l} dr \tag{23}$$
$$m = \frac{\omega Q}{2l} \int_0^l r^2 dr = \frac{\omega Q}{2l} \frac{l^3}{3} = \frac{\omega Q l^2}{6} \tag{24}$$
$$Q = \frac{6m}{\omega l^2} = \frac{6 \cdot 2,17 \cdot 10^{-10} Am^2}{1920 s^{-1} \cdot (28 \cdot 10^{-3} m)^2} = 8,65 \cdot 10^{-10} C \tag{25}$$

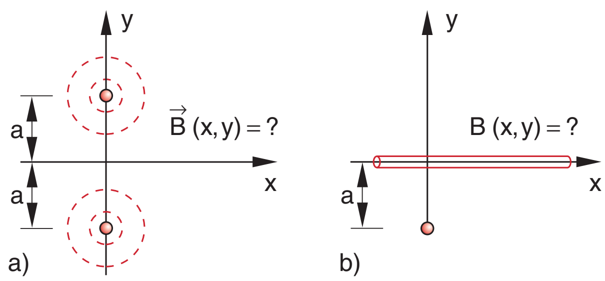
3. Allgemein gilt $\vec{D} = \vec{m} \times \vec{B}$. Hier ergibt sich

$$D = mB \sin\varphi = 2,17 \cdot 10^{-10} Amr^2 \cdot 0,322T \cdot \sin 68° = 6,48 \cdot 10^{-11} Nm \tag{26}$$

3.3 Magnetische Kraft

Zwei lange gerade Drähte sind im Abstand von $2a = 2cm$ parallel zueinander in z-Richtung ausgespannt und werden jeweils von dem Strom $I = 10A$ durchflossen, und zwar einmal in gleicher Stromrichtung, im anderen Fall in entgegengesetzter Richtung.

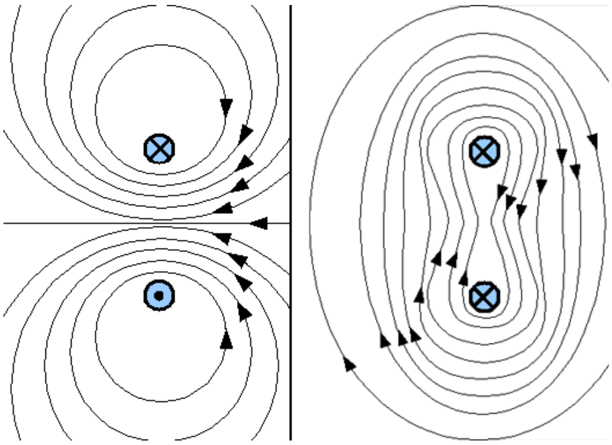
1. Man veranschauliche das resultierende Magnetfeld in der x-y-Ebene senkrecht zu den Drähten. (siehe Abbildung (a))



2. Man bestimme die Kräfte pro Längeneinheit, die die Drähte aufeinander ausüben (Abbildung (a)).

3. Wie groß ist die Kraft, wen die Drähte senkrecht zueinander stehen, das heißt auf den Geraden $z = y = 0$ und $x = 0, y = -2cm$ (siehe Abbildung (b)).

Lösung



1.

2. Bei parallelen Leitern gilt für die Kraft zwischen den Leitern pro Meter Länge

$$\frac{\mathbf{F}}{L} = \frac{\mu_0}{4\pi a} I_1 \cdot I_2 (\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z) \tag{27}$$

wobei $\hat{e}_z$ in die $+z$-Richtung zeigt und $\hat{e}_\varphi$ die Richtung des Magnetfelds eines Drahtes am Ort des anderen Drahtes angibt. Für $I_1 = I_2 = I$ sind $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ aufeinander zu gerichtet (Anziehung) und für $I_1 = -I_2 = I$ voneinander weg gerichtet (Abstoßung). Der Betrag der Kraft ist in beiden Fällen

$$\frac{|\mathbf{F}|}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a} \tag{28}$$

3. Die Kraft auf ein Längenelement dL des Drahtes in z-Richtung im Magnetfeld des Drahtes in x-Richtung ist

$$d\mathbf{F} = I_2 (d\mathbf{L} \times \mathbf{B}_1) \tag{29}$$
$$d\mathbf{L} = \{0, 0, dz\} \tag{30}$$
$$\mathbf{B}_1 = \{0, B_y, B_z\} \tag{31}$$

also $dF_x = -I_2 B_y dz$ und $dF_y = dF_z = 0$. Die y-Komponente des Magnetfeldes des stromdurchflossenen Drahtes in x-Richtung ist im Punkt $(0, -a, z)$ auf dem anderen Draht

$$B_y = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{z}{a^2 + z^2} \tag{32}$$
$$dF_x = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{z dz}{a^2 + z^2} \tag{33}$$

Auf ein Stück des Drahtes von $z_1 = -b$ bis $z_2 = +b$ wirkt damit die Kraft

$$F_x = \int_{z_1}^{z_2} dF_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \ln(a^2 + z^2)\Big|_{z=-b}^{z=+b} = 0 \tag{34}$$

Die Kraft zwischen den Drähten verschwindet also.

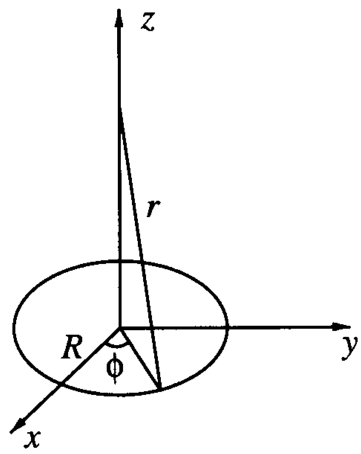
3.4 Biot-Savart und Ampere

Berechnen Sie durch die Wahl einer geeigneten Methode das Magnetfeld folgender Anordnungen:

1. Auf der Achse senkrecht durch den Mittelpunkt einer kreisförmigen, mit Strom I durchflossenen Leiterschleife mit Radius R.
2. Einer unendlich langen, mit Strom I durchflossenen Platte der Breite d (d sei so groß, dass Streufelder am Rand der Platte vernachlässigbar sind) mit vernachlässigbarer Dicke.
3. Zweier konzentrisch angeordneter, unendlich langer Rohre mit Innenradien r_1 und r_2 und Wandstärke d , die in entgegengesetzter Richtung jeweils vom Strom I durchflossen werden. Bestimmen und skizzieren Sie $B(r)$ für $0 \leq r < 1$. Die Stromdichte in den Rohren sei jeweils konstant (ortsunabhängig).

Lösung

1. Wir wählen als Parametrisierung:



$$d\vec{s} = R \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \qquad \vec{r} = R \begin{pmatrix} -\cos\phi \\ -\sin\phi \\ \frac{z}{R} \end{pmatrix} \tag{35}$$

Also lautet das Biot-Savartsche Gesetz:

$$B = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (d\vec{s} \times \vec{r}) \tag{36}$$

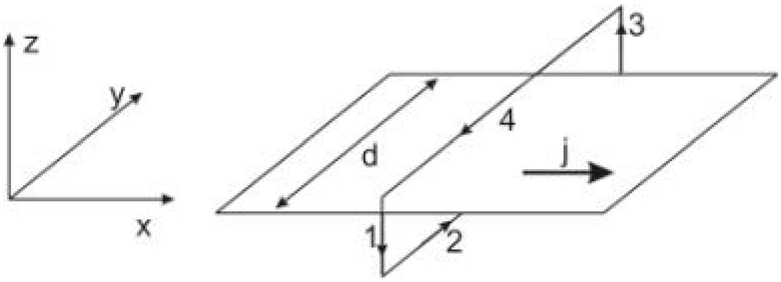
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} Rz\cos\phi \\ Rz\sin\phi \\ R^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \end{pmatrix} d\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi R^2 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \tag{37}$$

wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi \; d\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi \; d\phi = 0 \tag{38}$$

2. $\vec{B}$ weist in Richtung 2 und 4, die Beträge von 1 und 3 sind vernachlässigbar (vgl. Streufelder beim Plattenkondensator). Das Amperesche Gesetz lautet:

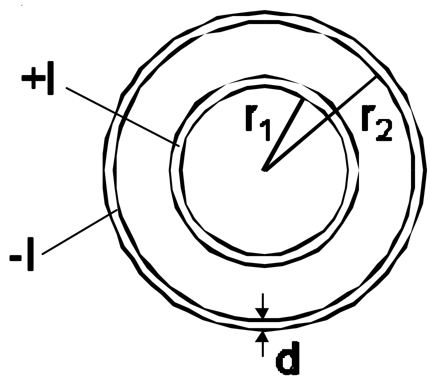


$$\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_2 B(-z)dy + \int_4 B(z)dy \tag{39}$$
$$= B(-z) \cdot d - B(z) \cdot (-d) = \mu_0 I \tag{40}$$

Aus Symmetriebetrachtungen folgt $B(z) = B(-z)$ und damit

$$B = \frac{\mu_0 I}{2d} \tag{41}$$

3. Hier eine Skizze zur Aufgabe



Das Ampere'sche Gesetz lautet hier $\int B\,ds = \mu_0 I$, mit I als dem eingeschlossenen Strom. Die Stromdiche im inneren Rohr beträgt $j = \frac{I}{\pi(r_1+d)^2 - \pi r_1^2}$, im äußeren Rohr beträgt sie $j = \frac{I}{\pi(r_2+d)^2 - \pi r_2^2}$. Es liegen nun unterschiedliche Beschreibungen je nach Wert von r vor:

$0 \leq r \leq r_1$**:** $2\pi r B = 0 \Rightarrow B = 0$.

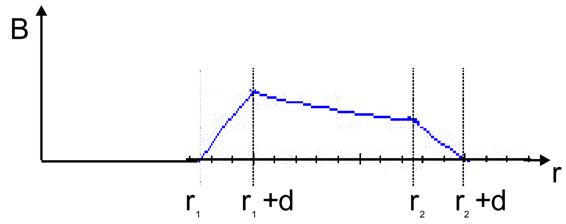
$r_1 \leq r \leq r_1 + d$**:** $2\pi r B = \mu_0 \frac{I}{\pi(r_1+d)^2 - \pi r_1^2} \cdot (\pi(r^2 - r_1^2)) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I (r^2 - r_1^2)}{2\pi r((r_1+d)^2 - r_1^2)}$.

$r_1 + d \leq r \leq r_2$**:** $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

$r_2 \leq r \leq r_2 + d$**:** $2\pi r B = \mu_0 \frac{I \cdot (\pi(r^2 - r_2^2))}{\pi(r_2+d)^2 - \pi r_2^2} - \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I (r_2+d)^2 - r^2}{2\pi r((r_2+d)^2 - r_2^2)}$.

$r_2 \leq r < \infty$**:** $2\pi r B = 0 \Rightarrow B = 0$.

Es ergibt sich eine Kurve der folgenden Form



3.5 Para-, Dia- und Ferromagnetismus

1. Wie kann man experimentell zwischen einem diamagnetischen, einem paramagnetischen und einem ferromagnetischen Material unterscheiden?

2. Ein leitendes, schwingendes Pendel taucht in ein homogenes Magnetfeld ein. Erläutern Sie die Dämpfung mithilfe der Lenzschen Regel.

3.6 Magnetisierung

Ein Aluminiumstab (Permeabilität von Aluminium: $\mu_{r,Al} = 1 + 2,2 \cdot 10^{-5}$) der Länge $l = 20cm$ wird mit $N = 250$ Drahtwicklungen gleichmäßig umwickelt. Im Draht fließe nun ein Strom $I = 10A$.

1. Ist Aluminium para-/ferro- oder diamagnetisch?

2. Wie groß ist die Magnetisierung M des Aluminiums?

3. Wie hoch ist die magnetische Flussdichte B im Aluminium?

4. Welcher Strom müsste in einer baugleichen Spule mit Eisenkern (Permeabilität von Eisen: $\mu_{r,Fe} \approx 500$) fließen, damit dort die gleiche magnetische Flussdichte herrscht?

Lösung

1. Wegen $\mu_{r,Al} > 1$: paramagnetisch

2.
$$H = \frac{NI}{l} = 12500\frac{A}{m} \tag{42}$$
$$\Rightarrow M = \chi H = (\mu_r - 1)H = 0,25\frac{A}{m} \tag{43}$$

3.
$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0\mu_r H = 1,57 \cdot 10^{-2}\frac{Vs}{m^2} \tag{44}$$

4.
$$B_{Al} = B_{Fe} \tag{45}$$
$$\Rightarrow \mu_0\mu_{r,Al}H_{Al} = \mu_0\mu_{r,Fe}H_{Fe} \tag{46}$$
$$\Rightarrow \mu_{r,Al}I_{Al} = \mu_{r,Fe}I_{Fe} \tag{47}$$
$$\Rightarrow I_{Fe} = \frac{\mu_{r,Al}}{\mu_{r,Fe}}I_{Al} = 0,02A \tag{48}$$