Ferienkurs Experimentalphysik 2

Lösung zum Übungsblatt 1: Elektrostatik

Tutoren: Katharina Hirschmann und Gabriele Semino

1 Elektrostatik

1.1 Ladungsverteilung

1. Zwei punktförmige Ladungen von je 1 C üben aufeinander eine Kraft von 1 N aus.
   (a) Wie groß, ist der Abstand zwischen den Ladungen?
   (b) Welche Feldstärke erzeugt eine Ladung am Ort der jeweils anderen?
   (c) Zum Vergleich der Größenordnungen der Kräfte: Wie groß müssten zwei Massen sein, um im gleichen Abstand eine Gravitationskraft von 1N aufeinander auszuüben?
2. Bei $P_0 = (0, 0)$ befinde sich eine festgehaltene Ladung $+q$. Ein Teilchen der Masse m und der Ladung $+q$ werde bei $P_1 = (x_0, 0)$ festgehalten. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ werde das Teilchen losgelassen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Teilchens in Abhängigkeit von seiner Position.
3. Eine Ladung q wird in zwei Teile geteilt. Wie groß müssen diese sein, damit sich bei einem gegebenen Abstand r der beiden (punktförmigen) Ladungsteile eine maximale abstoß ende Kraft ergibt?

Lösung

1. (a) Über das Coulomb'sche Gesetz $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r}\right)^2$ kann der Abstand r der zwei Ladungen einfach bestimmt werden zu :

$$r = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 F}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}} \cdot 1\,\mathrm{N}}} \cdot 1\,\mathrm{C}$$
$$= 94803\,\mathrm{m} = 94.8\,\mathrm{km} \tag{1}$$

   (b)

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{F}{Q} = \frac{1\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{C}} = 1\,\mathrm{V/m} \tag{2}$$

(c) Über das Gravitationsgesetz $F = G\left(\frac{m}{r}\right)^2$ kann leicht diejenige Masse bestimmt werden, die bei einem Abstand von $r = 94803\,\mathrm{m}$ $1\,\mathrm{N}$ erzeugen würde:

$$m = r\sqrt{\frac{F}{G}} = 94803\,\mathrm{m}\cdot\sqrt{\frac{1\,\mathrm{N}}{6.6726\cdot 10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}}}} = 11.6\cdot 10^{9}\,\mathrm{kg} \tag{3}$$

Das ist übrigens auch der Grund, warum man in der Elektrodynamik mit ruhigem Gewissen die Gravitationskräfte vernachlässigen kann.

2. Wie meistens bei der Bestimmung von Geschwindigkeiten, kann ein Ansatz zum Lösen der Aufgabe der Energieerhaltungssatz sein. Die potentielle Energie eines Teilchens im elektrostatischen Kraftfeld berechnet sich aus dem elektrischen Potential $\phi(\vec{r})$:

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r) = \int_r^\infty \vec{E}(\vec{s})d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{s^2}ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{4}$$

Der Energieerhaltungssatz für ein Teilchen im elektrostatischen Kraftfeld lautet dann:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + q\phi(x) = \frac{1}{2}mv_2^2 + q\phi(x_0) = \text{const.} \tag{5}$$

Am Ort x_0 ist die Geschwindigkeit des Teilchens $v_2 = 0$ und somit folgt für v_1:

$$v_1^2 = \frac{2q}{m}(\phi(x_0) - \phi(x)) = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 m}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right) \tag{6}$$

Daraus folgt für den Vektor $\vec{v}$:

$$\vec{v} = v\hat{x} = q\sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon_0 m}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right)}\hat{x} \tag{7}$$

3. Die Gesamtladung q vor der Trennung in die Einzelladungen q_1 und q_2 betrug $q = q_1 + q_2$. Die elektrostatische Anziehung, die beide Ladungen nach der Trennung aufeinander auswirken ist

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q_1(q - q_1)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q_1 q - q_1^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{8}$$

Für die maximale abstoßende Kraft kann dieser Ausdruck nach z.B. q_1 abgeleitet werden:

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = \frac{q - 2q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0 \tag{9}$$

q_1 ergibt sich daraus zu

$$q_1 = \frac{q}{2} = q_2 \tag{10}$$

1.2 Gaußgesetz

1. Durch welche Ladungsdichteverteilung $\rho(\mathbf{r})$ wird das Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \alpha\exp(-\beta r)\mathbf{r} \tag{11}$$

($\alpha, \beta > 0$) erzeugt? Wo im Raum verläuft die Grenzfläche zwischen positiver und negativer Ladungsdichte? Skizzieren Sie ρ als Funktion von r.

Hinweis: Benutzen Sie $\nabla\cdot(f(r)\mathbf{r}) = rf' + 3f$.

Lösung:

Vom Feld ausgehend findet man die zugehörige Ladungsverteilung durch das Gaußsche Gesetz in Differentialform:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{12}$$

Wir bilden mit Hilfe der angegebenen Formel $\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r}) = rf' + 3f$ die Divergenz des gegebenen rotationssymmetrischen Feldes:

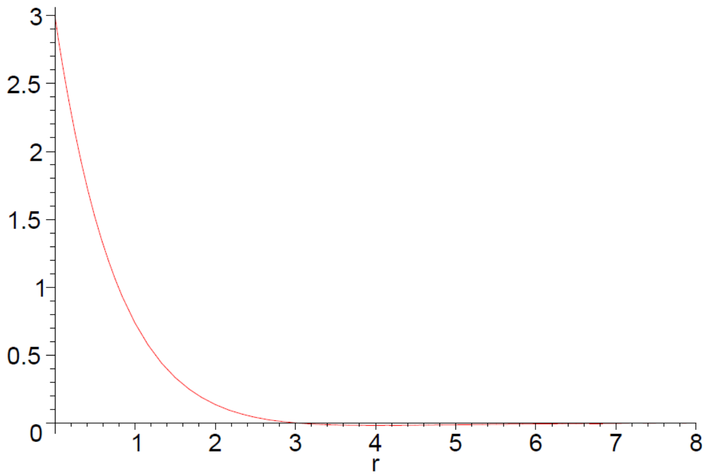
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (\alpha e^{-\beta r}\mathbf{r}) = -\alpha\beta r e^{-\beta r} + 3\alpha e^{-\beta r} = \alpha e^{-\beta r}(3 - \beta r) \tag{13}$$

Also:

$$\rho(\mathbf{r}) = \alpha\epsilon_0 e^{-\beta r}(3 - \beta r) \tag{14}$$

Für kleine r ist die Ladungsdichte also positiv, für große r negativ. Die Grenze zwischen diesen Bereichen ist durch die Sphäre $r = 3/\beta$ gegeben.

Für $\alpha\epsilon_0 = 1$ und $\beta = 1$ sieht die Ladungsdichte als Funktion von r so aus:



2. Wie groß ist die Gesamtladung Q dieser Verteilung? Finden Sie das Ergebnis in Anbetracht des in a) skizzierten Graphen der Ladungsverteilung überraschend?

   Hinweis: Benutzen Sie das Gauß'sche Gesetz in Integralform um Q zu berechnen.

Lösung:

Nach dem Gaußschen Gesetz in Integralform ist

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}Q \tag{15}$$

wobei Q die Ladung im Volumen V und S die Oberfläche von V ist. Wählt man als Volumen eine Kugel mit Radius R um den Ursprung, dann ist also

$$Q_R = \epsilon_0 \int_{S_R} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \alpha \int_{S_R} d\mathbf{S} \cdot e^{-\beta r} \mathbf{r} \tag{16}$$

Der Flächenvektor $d\mathbf{S}$ des Flächenelements der Kugeloberfläche ist $dS\mathbf{n}$ mit $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Daher wird das Oberflächenintegral zu

$$Q_R = \epsilon_0 \alpha \int_{S_R} dS \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot e^{-\beta r} \mathbf{r} = \epsilon_0 \alpha \int_{S_R} dS r e^{-\beta r} \tag{17}$$

Der Integrand ist nun auf der Kugeloberfläche konstant, da er nur von r abhängt. Das Integral ist daher einfach das Produkt aus der Größe $4\pi R^2$ der Kugeloberfläche und dem konstanten Wert des Integranden $Re^{-\beta R}$ auf der Fläche:

$$Q_R = 4\pi\epsilon_0 \alpha R^3 e^{-\beta R} \tag{18}$$

Für $R \to \infty$ ergibt sich die Ladung im gesamten Raum, und man erkennt dass sie verschwindet:

$$Q = \lim_{R\to\infty} Q_R = 4\pi\epsilon_0 \alpha \lim_{R\to\infty} (R^3 e^{-\beta R}) = 0 \tag{19}$$

da die $e-$Funtkion für $R \to \infty$ schneller zerfällt als die Funktion R^3 ansteigt.

Schaut man sich den Graphen der Ladungsdichtefunktion $\rho(r)$ aus Teil a) an, dann verwundert es zunächst, dass die Gesamtladung null sein soll. Denn anscheinend ist die Ladungsdichte für kleine r ja stark positiv und dann ab $r = 3$ nur ganz schwach negativ. In der Tat ist das Integral

$$\int_0^\infty dr \rho(r) \tag{20}$$

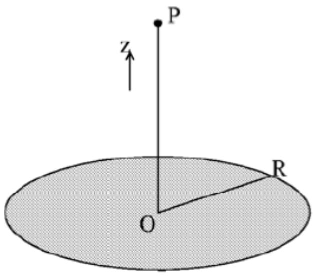
größer als null, aber dies ist (schon aus Dimensionsgründen) nicht die Gesamtladung. Denn man muss berücksichtigen, dass es 'viel mehr Punkte im Raum' mit z.B. $r = 4$ gibt als mit $r = 1$. Genauer: Das Volumen einer infinitesimalen Kugelschale der Dicke dr ist $4\pi r^2 dr$, nimmt also bei gegebenem dr mit r^2 zu. Das Integral, das die Gesamtladung darstellt, ist

$$Q = \int_0^\infty dr 4\pi r^2 \rho(r) \tag{21}$$

und man kann nachrechnen, dass dies tatsächlich null ist. Die stark positive Ladungsdichte zwischen $r = 0$ bis $r = 3$ füllt also ein relativ kleines Volumen, während die schwach negative Ladungsdichte von $r = 3$ bis etwas $r = 6$ ein deutlich größeres Volumen erfüllt. Insgesamt ergibt sich so die Gesamtladung null.

1.3 E-Feld einer Scheibe

Eine Scheibe mit Radius R hat eine Oberflächenladungsdichte σ. Die z-Achse schneidet den Mittelpunkt O. Die Gesamtladung der Schiebe beträgt $Q = \pi R^2 \sigma$.



1. Berechnen Sie die Größe und Richtung des elektrischen Feldes $\vec{E}(z)$ an einem Punkt P in einer Entfernung z über dem Mittelpunkt der Scheibe. Drücken Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von Q, R, ϵ_0 und z aus.

   Hinweis: Das Ergebnis für das elektrische Feld entlang der z-Achse eines Rings mit Radius r und Ladung q mag hier hilfreich sein:

$$\vec{E}_{\text{Ring}}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \vec{e}_z \tag{22}$$

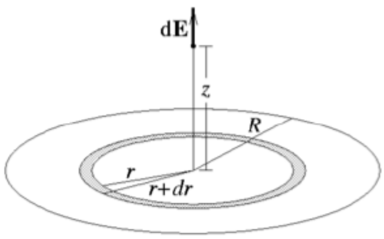
2. Skizzieren Sie $\vec{E}(z)$ qualitativ für $z > 0$.

3. Benutzen Sie die Taylorreihe $(1 + u)^n \approx 1 + nu + \ldots$ für $u \ll 1$ um vereinfachte Ausdrücke für die folgenden zwei Grenzfälle von $\vec{E}(z)$ zu finden: $z^2 \ll R^2$ und $z^2 \gg R^2$.

4. Vergleichen Sie das Ergebnis aus (c) mit $\vec{E}(r)$ einer Punktladung Q im Ursprung.

Lösung

1. Wir unterteilen die Scheibe in Ringe: Für diese Ringe ist ihr jeweiliges E-Feld dE



   bekannt. Diese lassen sich dann über den Radius R der Scheibe integrieren.

$$\mathrm{d}A = 2\pi r\,\mathrm{d}r \qquad \sigma = \frac{Q}{A} \tag{23}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}A = \frac{Q}{\pi R^2}(2\pi r\,\mathrm{d}r) \tag{24}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\,\mathrm{d}q}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r\,\mathrm{d}r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \tag{25}$$

   um diesen Ausdruck zu integrieren benutzt man die Substitution

$$s := \sqrt{z^2 + r^2} \Rightarrow r\,\mathrm{d}r = s\,\mathrm{d}s \tag{26}$$

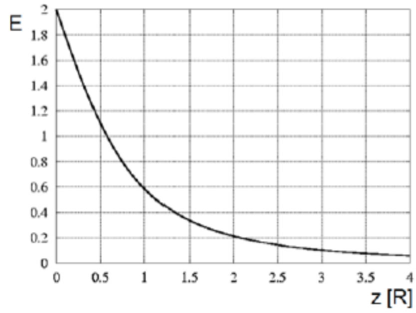
also hat das Integral die Form $\int s^{-2} ds$:

$$E = \int \mathrm{d}E = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r\,\mathrm{d}r}{(z^2+r^2)^{3/2}} \tag{27}$$

$$= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[\frac{-1}{(z^2+r^2)^{1/2}} \right]_0^R \tag{28}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} \right) \vec{e}_z \qquad \text{(für } z > 0\text{)} \tag{29}$$

2. Man erhält den Verlauf:



3. Die Funktion $(1+u)^n$ kann um 0 für $u \ll 1$ wie folgt durch eine Taylorreihe approximiert werden:

$$(1+u)^n \approx 1 + nu + \ldots \tag{30}$$

- $z^2 \ll R^2$:
  Die Gleichung für $\vec{E}(z)$ lässt sich umschreiben als

$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{\frac{z}{R}}{\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2}}} \right) \vec{e}_z \tag{31}$$

  also gilt

$$\left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R} \right)^2 \tag{32}$$

  damit ergibt sich

$$\vec{E}(z) \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{z}{R} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right) \right) \vec{e}_z \tag{33}$$

$$\approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_z \qquad \text{für } z^2 \ll R^2 \tag{34}$$

- $z^2 \gg R^2$:
  Die Gleichung für $\vec{E}(z)$ lässt sich umschreiben als

$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} \right) \vec{e}_z \tag{35}$$

also gilt

$$\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2 \tag{36}$$

damit ergibt sich

$$\vec{E}(z) \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2\right)\right)\vec{e}_z \tag{37}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\vec{e}_z \tag{38}$$

4. Das Elektrischer Feld einer Punktladung Q im Ursprung lautet

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r \tag{39}$$

was natürlich der Näherung $z^2 \gg R^2$ aus (c) entspricht.

1.4 Plattenkondensatoren

Eine Parallelschaltung zweier baugleicher $2,0\mu F$ Plattenkondensatoren wird an eine 100V-Batterie angeschlossen. Anschließend wird die Verbindung zur Batterie getrennt und der Abstand zwischen den Platten eines der Kondensatoren verdoppelt. Ermitteln Sie die Ladung auf der positiv geladenen Platte jedes Kondensators.

Lösung

Bei einer Parallelschaltung von Kondensatoren lässt sich die Ersatzkapazität berechnen mit

$$C = C_1 + C_2 = 4,0\mu F \tag{40}$$

Damit lässt sich die Gesamtladung berechnen mit

$$Q = CU = 400\mu C \tag{41}$$

Diese Ladung verteilt sich nach dem Trennen der Batterie auf beide Kondensatoren. Durch die Verdoppelung des Plattenabstandes eines Kondensators halbiert sich dessen Kapazität. Weil die Kondensatoren immernoch parallel geschalten sind, liegt an beiden jedoch die gleiche Spannung an, also:

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad U_1 = U_2 \qquad C_1 = \frac{C_2}{2} \tag{42}$$

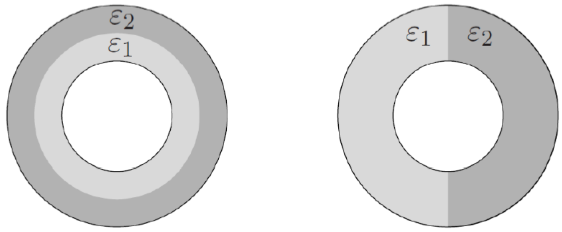
$$\Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{2C_1} \tag{43}$$

$$\Rightarrow 2Q_1 = Q_2 \tag{44}$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{Q}{3} = 133\mu C \qquad Q_2 = \frac{2Q}{3} = 267\mu C \tag{45}$$

1.5 Kugelkondensatoren

An den beiden abgebildeten Kugelkondensatoren liegt zwischen der inneren und der äußeren Metallkugel die Spannung U an. Dabei stellen die schattierten Bereiche Dielektrika dar. Berechnen Sie für (a) und (b) die Kapazität und die Flächenladungsdichte auf der



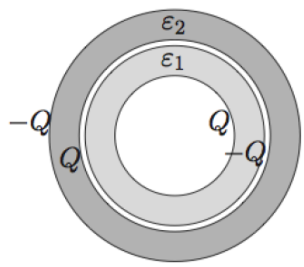
(a) (b)

äußeren und der inneren Kugel. Nehmen Sie an, dass die Felder in beiden Fallen rein radial ausgerichtet sind.
Hinweis: Die Kapazitat eines Kugelkondensators mit innerem bzw. äußerem Radius R_i bzw. R_a und Dielektrikum ϵ im Zwischenraum ist gegeben mit

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \tag{46}$$

Lösung

1. Wir denken uns nun den gegebenen Kondensator als Grenzfall von zwei ineinandergesteckten Kugelkondensatoren mit kleinem Luftspalt. Auf beiden Kondensatoren befinde sich die Ladung Q. Genauer: Auf der inneren Schale des inneren Kondensators Q, auf seiner äußeren -Q. Ebenso für den äußeren Kondensator. Dann herrscht im luftgefüllten Gebiet kein Feld. Es handelt sich dann um eine Reihenschaltung



von Kondensatoren. Für den Inneren Kondensator gilt

$$C_1 = 4\pi\epsilon_1\epsilon_0 \frac{R_{a1} R_{i1}}{R_{a1} - R_{i1}} \tag{47}$$

und entsprechend für den äußeren Kondensator. Die Gesamtkapazität lässt sich dann berechnen mit

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_{a1} - R_{i1}}{\epsilon_1 R_{a1} R_{i1}} + \frac{R_{a2} - R_{i2}}{\epsilon_2 R_{a2} R_{i2}}\right) \tag{48}$$

Nun lassen wir den Spalt gegen null gehen und erhalten $R_{a1} = R_{i2} =: R_m$, außerdem $R_i := R_{i1}$ und $R_a := R_{a2}$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_m - R_i}{\epsilon_1 R_m R_i} + \frac{R_a - R_m}{\epsilon_2 R_a R_m}\right) \tag{49}$$

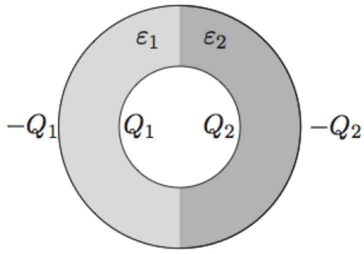
$$\Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_1\epsilon_2 R_i R_m R_a}{\epsilon_1 R_i (R_a - R_m) + \epsilon_2 R_a (R_m - R_i)} \tag{50}$$

Für die Flächenladungsdichten gilt dann

$$\sigma_i = \frac{Q}{4\pi R_i^2} = \frac{CU}{4\pi R_i^2} = \frac{\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2 R_m R_a U}{\epsilon_1 R_i^2(R_a - R_m) + \epsilon_2 R_a R_i (R_m - R_i)} \tag{51}$$

$$\sigma_a = \frac{Q}{4\pi R_a^2} = \frac{CU}{4\pi R_a^2} = \frac{\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2 R_m R_i U}{\epsilon_1 R_i R_a(R_a - R_m) + \epsilon_2 R_a^2 (R_m - R_i)} \tag{52}$$

2. In diesem Fall befinden sich die beiden Hälften einer Kugelschale auf demselben Potential, tragen jedoch untschiedliche Ladungen. Es gilt:



$$Q_1 = C_1 U \qquad Q_2 = C_2 U \tag{53}$$

mit den halben Kapazitäten, also:

$$C_1 = 2\pi\epsilon_1\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \qquad C_2 = 2\pi\epsilon_2\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \tag{54}$$

Die Gesamtladung beträgt dann

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} U \tag{55}$$

und die Gesamtkapazität

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)\epsilon_0 \frac{R_a R_i}{R_a - R_i} \qquad (= C_1 + C_2) \tag{56}$$

Es handelt sich also um eine Parallelschaltung von Kondensatoren. Für die Oberflächenladungsdichten gilt:

$$\sigma_{1i} = \frac{Q_1}{2\pi R_i^2} = \epsilon_0\epsilon_1 \frac{R_a/R_i}{R_a - R_i} U \tag{57}$$

$$\sigma_{1a} = \frac{Q_1}{2\pi R_a^2} = \epsilon_0\epsilon_1 \frac{R_i/R_a}{R_a - R_i} U \tag{58}$$

$$\sigma_{2i} = \frac{Q_2}{2\pi R_i^2} = \epsilon_0\epsilon_2 \frac{R_a/R_i}{R_a - R_i} U \tag{59}$$

$$\sigma_{2a} = \frac{Q_2}{2\pi R_a^2} = \epsilon_0\epsilon_2 \frac{R_i/R_a}{R_a - R_i} U \tag{60}$$