Probeklausur

Allgemein Hinweise: Die Arbeitszeit beträgt **90 Minuten**. Falls nicht anders angegeben, sind alle Lösungen **ausführlich und nachvollziehbar** zu begründen. Schreiben Sie bitte **nicht mit Bleistift** und auch **nicht in roter oder grüner** Farbe. Zum Erreichen der Note 4,0 sind mindestens 50% der Punkte nötig.

1 Stetigkeit [7 Punkte]

Sei X, metrischer Raum, zusammenhängend und $f : X \to \mathbb{R}$ lokal konstant d.h. zu jedem $x \in X$ exisitiert eine Umgebung $x \in U \subset X$ so dass $f|_U$ konstant. Zeige: f ist konstant. Geben Sie zudem ein Gegenbeispiel an, für den Fall, dass X nicht zusammenhängend ist (eine lokal konstanten Funktion an, die nicht konstant ist).

Lösung Sei $z \in X$ und $A = \{x \in X | f(x) = f(z)\}$. Nach Voraussetzung ist f lokal konstant, also ist A offen. Die Menge $B := X \setminus A = \{x \in X | f(x) \neq f(z)\} = \{x \in X | f(x) < f(z)\} \cup \{x \in X | f(x) > f(z)\}$ ist auch offen und es gilt $X = A \cup B$. Da X nach Voraussetzung zusammenhängend ist, muss gelten $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. Da aber $z \in A \Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow f$ konstant. Als Gegenbeispiel wählen wir $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Diese Menge ist nicht zusammenhängend. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ ist dann lokal konstant, aber nicht global konstant.

2 Differenzierbarkeit [10 Punkte]

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

Man zeige

(a) f ist partiell differenzierbar

(b) f ist nicht stetig

(c) f ist nicht total differenzierbar

(d) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ im Punkt $(1,0)$?

Lösung

(a) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen insbesondere auch partiell differenzierbar. Betrachte also den Fall $(x,y) = (0,0)$

$$\begin{aligned} \partial_x f(0,0) &= \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{f(h,0)}{h} \\ &= \lim_{(h,0)\to(0,0)} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

und analog

$$\partial_y f(0,0) = 0.$$

f ist also auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar und damit ist f partiell differenzierbar. [3 Punkte]

(b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wir können also nur die Unstetigkeit am Nullpunkt zeigen. Wir benutzen dafür Polarkoordinaten $(x,y) = (r\sin\phi, r\cos\phi)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} f(r,\phi)\\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \sin\phi\cos\phi}{r^2}\\ &= \lim_{r\to 0} \sin\phi\cos\phi\end{aligned}$$

Es gibt ϕ für die der Grenzwert $\neq 0 = f(0,0)$ ist $\Rightarrow$ f ist nicht stetig in $(0,0)$. [3 Punkte]

(c) Da f in $(0,0)$ nicht stetig ist, ist f dort auch nicht differenzierbar also f nicht differenzierbar. [1 Punkt]

(d) Außerhalb von $(0,0)$ ist f differenzierbar. Wir berechnen zunächst den Gradienten für $(x,y) \neq 0$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Dann lässt sich die Richtungsableitung einfach berechnen.

$$\begin{aligned}\partial_v f(1,0) &= \nabla f(1,0)\cdot v\\ &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\\ &= v_2.\end{aligned}$$

[3 Punkte]

3 Taylor und Extrema [10 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f(0,0) = 0$, f hat bei $(0,0)$ einen stationären Punkt und

$$H_f = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie, es existiert eine Umgebung U von $(0,0)$, sodass für alle $(x,y) \in U$ gilt $f(x,y) \geq x^2 + y^2$ (Tipp: Taylor-Entwicklung).

Lösung Mit den gegebenen Informationen schreiben wir die Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung hin

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 + (0,0)(x,y)^T + \tfrac{1}{2}\left(4x^2+4y^2-xy-yx\right)+\theta(3) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(4x^2+4y^2-2xy\right)+\theta(3) \end{aligned}$$

Damit gilt $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ wegen $x^2+y^2\geq 2xy \Leftrightarrow -2xy\geq -x^2-y^2$

$$f(x,y)\geq \tfrac{1}{2}(4x^2+4y^2-x^2-y^2)+\theta(3) = (x^2+y^2)\left(\tfrac{3}{2}+\tfrac{\theta(3)}{x^2+y^2}\right)$$

4 Implizite Funktionen [12 Punkte]

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U\subset\mathbb{R}^3$ von $(0,0,0)$ gibt , in der das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sin(x-y^2+z^3)-\cos(x+y+z)+1=0 \\ \sin(y+x^2-z^3)+\cos(x-y)-1=0 \end{aligned}$$

eindeutig nach (x,y) aufgelöst werden kann (d.h. $(x,y)=h(z)$ mit einer geeigneten Funktion h). Berechnen Sie weiterhin die Ableitung von h im Nullpunkt.

Lösung Wir betrachten die stetig differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \begin{pmatrix} \sin(x-y^2+z^3)-\cos(x+y+z)+1 \\ \sin(y+x^2-z^3)+\cos(x-y)-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt $f(0,0,0)=(0,0)$, der Punkt ist also eine Nullstelle. Nun berechnen wir das partielle Differential

$$\begin{aligned} D_{xy}f(0,0,0) &= \begin{pmatrix} \cos(x-y^2+z^3)+\sin(x+y+z) & -2y\cos(x-y^2+z^3)+\sin(x+y+z) \\ 2x\cos(y+x^2-z^3)-\sin(x-y) & \cos(y+x^2-z^3)\sin(x-y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Einheitsmatrix invertierbar, also können wir nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung an der Stelle $(0,0,0)$ entsprechend auflösen mit einer eindeutig bestimmten Funktion $h(z)$, die sogar differenzierbar ist. Die Ableitung berechnen wir ebenfalls nach dem Satz über implizite Funktionen

$$h'(0) = -[\mathrm{D}_{xy}f(0,h(0))]^{-1}\mathrm{D}_z f(0,h(0))$$

Das partielle Differential $\mathrm{D}_z f(x,y,z)$ lautet

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_z f(0,0,0) &= \begin{pmatrix} 3z^2\cos(x-y^2+z^3)+\sin(x+y+z) \\ -3z^2\cos(y+x^2-z^3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit erhalten wir für die Ableitung

$$
\begin{aligned}
h'(0) &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

5 Extrema mit Nebenbedingungen [14 Punkte]

Man bestimme die Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) = 2xz - y^2$$

auf der Menge $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ wie folgt:

(a) Wie lauten der Gradient und die Hesse-Matrix von f?

(b) Besitzt f einen stationären Punkt im Inneren von K?

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Kandidaten für Extremwerte von f auf dem Rand ∂K.

(d) In welchen Punkten liegen die globalen Maxima und Minima von $f|_K$?

Lösung

(a)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2z \\ -2y \\ 2x \end{pmatrix} \qquad H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2 Punkte]

(b) Aus $\nabla f(x, y, z) = 0$ folgt $x = 0, y = 0, z = 0$. f hat also im Inneren von K einen stationären Punkt. [2 Punkte]

(c) Der Rand von K wird beschrieben durch die Nullstellen von $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Wegen $\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, ist g im Ursprung nicht regulär, auf ∂K dagegen schon. Wir können also den Satz über die Lagrange-Multiplikatoren anwenden. Extremwerte auf dem Rand erfüllen die Gleichungen

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \text{ und } g(x, y, z) = 0.$$

Damit haben wir vier Unbekannte und vier Gleichungen

$$
\begin{aligned}
2z &= 2\lambda x && (1) \\
-2y &= 2\lambda y && (2) \\
2x &= 2\lambda z && (3) \\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1. && (4)
\end{aligned}
$$

Wir machen eine Fallunterscheidung.
1. Fall: Aus Gleichung 1 und 3 erhlt man $\lambda = 1$. Eingesetzt in die zweite Gleichung muss dann $y = 0$ sein. Wir setzen dies und $x = z$ in die Nebenbedingung ein. Man erhält die beiden Kandidaten

$$p = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), q = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

In beiden Fällen nimmt f den Funktionswert 1 an.
2. Fall: Die zweite Gleichung wird durch $\lambda = -1$ erfüllt für alle $y \in \mathbb{R}$. Das heißt y ist frei wählbar. Aus Gleichung 1 und 3 erhält man die Bedingung $x + z = 0$. Kombiniert man das mit der Nebenbedingung erhält man als Kandidaten alle Punkte

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Die Funktion nimmt überall den Wert -1 an. Dazu ersetzt man y^2 durch die Nebenbedingung und setzt zudem $x = -z$ ein.
3. Fall: $\lambda \neq \pm 1$. Es gibt keine Punkte, die die Bedingungen erfüllen. [7 Punkte]

(d) Da K kompakt ist, muss die Funktion f darauf ein globales Maximum und Minimum annehmen. Die Kandidaten sind oben aufgelistet, hinzu kommt noch der stationäre Punkt $(0, 0, 0)$ im Inneren von K mit Funktionswert 0. Damit sieht man, dass es sich bei p und q um die (globalen und lokalen) Maxima handeln muss und bei den Punkten auf der Kreislinie S um die (globalen und lokalen) Minima. [3 Punkte]

6 Parametrisierung auf Bogenlänge [4 Punkte]

Geben Sie explizit eine Parametrisierung auf Bogenlänge, $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, der Kettenlinie $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t)(-t, -\cosh t)$.

Lösung

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2 t'} dt' = \int_0^t \cosh t' dt' = \sinh t.$$

[2Punkte]
Mit der Umkehrfunktion $\tilde{t}(s) = \operatorname{arsinh}(s) = \sinh^{-1}(s)$ [1Punkt] ist

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\tilde{t}(s)) = (-\operatorname{arsinh}(s), -\cosh(\operatorname{arsinh}(s))) &= (-\operatorname{arsinh}(s), -\sqrt{1 + \sinh(\operatorname{arsinh}(s))^2}) \\ &= (-\operatorname{arsinh}(s), -\sqrt{1 + s^2}).\end{aligned}$$

[1 Punkt]

7 Wegintegrale [7 Punkte]

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f(x) \mathrm{d}x$:

$$f(x, y, z) = (2z - \sqrt{x^2 + y^2}, z, z^2)$$

,

$$\gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t), 0 \leq t, \leq 2\pi$$

Lösung

$$\int_\gamma f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} (2t-t,t,t^2)\cdot \begin{pmatrix} \cos(t)-t\sin(t) \\ \sin(t)+t\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} t\cos(t)dt + \int_0^{2\pi} t\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} t^2\cos(t)dt - \int_0^{2\pi} t^2\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} t^2 dt$$

mit partieller Integration $\Rightarrow$

$$\frac{8}{3}\pi^3 + 4\pi^2 + 2\pi$$

8 Trennbare Differentialgleichung [8 Punkte]

(a) Finden Sie auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen von $yy' = x(1-y^2)$ mit $y(0) = y_0, y_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(b) Wie viele konstante Lösungen gibt es?

(c) Wie viele auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen mit $y(0) = 0$ gibt es?

Lösung

(a) Wir lösen durch Separation der Variablen. Für eine Lösung $y(x)$ mit $y(0) = y_0$ muss gelten

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{ydy}{1-y^2} = \int_0^x x'dx', \text{ also } -\frac{1}{2}\ln|1-y(x)^2| + \frac{1}{2}\ln|1-y_0^2| = \frac{1}{2}x^2.$$

Da die Integration über die Singularitäten $y = \pm 1$ nicht möglich ist, müssen $1-y_0^2$ und $1-y(x)^2$ für alle x das gleiche Vorzeichen haben. Somit ergibt beidseitiges exponenzieren

$$1 - y(x)^2 = e^{-x^2}(1-y_0^2).$$

Die rechte Seite ist immer kleiner als 1. Damit $y(x)$ stetig ist, muss also gelten:

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1-e^{-x^2}(1-y_0^2)}, & \text{falls } y_0 > 0, \\ -\sqrt{1-e^{-x^2}(1-y_0^2)}, & \text{falls } y_0 < 0 \end{cases}$$

denn der Radikant ist in beiden Fällen immer positiv.

(b) Die rechte Seite der Differentialgleichung ist Null für alle x, genau dann, wenn $y = \pm 1$ ist. Somit sind $y(x) = \pm 1$ genau zwei konstante Lösungen.

(c) Für $y_0 = 0$ sind $y_\pm(x) = \pm\sqrt{1-e^{-x^2}}$ die einzigen zwei Lösungen auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\lim_0 y_\pm(x) = 0$.
Für kleine x gilt $y_\pm(x) \approx \pm\sqrt{x^2} = \pm|x|$. Somit gibt es genau zwei Lösungen

$$y_1(x) = \begin{cases} y_+(x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ y_-(x) & \text{für } x < 0 \end{cases} \text{ und } y_2(x) = -y_1(x),$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und Lösungen der Differentialgleichung mit $y(0) = 0$ sind.

9 Vektorfelder [8 Punkte]

(a) Zeigen Sie: für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, jeweils stetig partiell diferenzierbar, dass

$$\nabla \times (fv) = \nabla f \times v + f\nabla \times v.$$

(b) Berechnen Sie $\nabla \times w(x)$ für $x \neq 0$ mit $w(x_1, x_2, x_3) = ||x|| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Lösung

a) $w = fv$ ist das Vektorfeld mit den Komponenten $w(x) = \begin{pmatrix} f(x)v_1(x) \\ f(x)v_2(x) \\ f(x)v_3(x) \end{pmatrix}$. Mit der Produktregel ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot} fv = \mathrm{rot} w &= \begin{pmatrix} \partial_2 w_3 - \partial_3 w_2 \\ \partial_3 w_1 - \partial_1 w_3 \\ \partial_1 w_2 - \partial_2 w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_2 f)v_3 + f\partial_2 v_3 - (\partial_3 f)v_2 - f\partial_3 v_2 \\ (\partial_3 f)v_1 + f\partial_3 v_1 - (\partial_1 f)v_3 - f\partial_1 v_3 \\ (\partial_1 f)v_2 + f\partial_1 v_2 - (\partial_2 f)v_1 - f\partial_2 v_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\partial_2 f)v_3 - (\partial_3 f)v_2 \\ (\partial_3 f)v_1 - (\partial_1 f)v_3 \\ (\partial_1 f)v_2 - (\partial_2 f)v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f\partial_2 v_3 - f\partial_3 v_2 \\ f\partial_3 v_1 - f\partial_1 v_3 \\ f\partial_1 v_2 - f\partial_2 v_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + f\mathrm{rot} v = \mathrm{grad} f \times v + f\mathrm{rot} v.
\end{aligned}$$

b) Es ist $\mathrm{grad}||x|| = \frac{x}{||x||}$ und $\mathrm{rot} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot} w(x) = \mathrm{grad} f(x) \times \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{||x||} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{||x||} \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)x_3 \\ x_3(x_2 - x_1) \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} = \frac{x_2 - x_1}{||x||} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$