Probeklausur

Allgemein Hinweise: Die Arbeitszeit beträgt **90 Minuten**. Falls nicht anders angegeben, sind alle Lösungen **ausführlich und nachvollziehbar** zu begründen. Schreiben Sie bitte **nicht mit Bleistift** und auch **nicht in roter oder grüner** Farbe. Zum Erreichen der Note 4,0 sind mindestens 50% der Punkte nötig.

1 Stetigkeit [7 Punkte]

Sei X, metrischer Raum, zusammenhängend und $f : X \to \mathbb{R}$ lokal konstant d.h. zu jedem $x \in X$ exisitiert eine Umgebung $x \in U \subset X$ so dass $f|_U$ konstant. Zeige: f ist konstant. Geben Sie zudem ein Gegenbeispiel an, für den Fall, dass X nicht zusammenhängend ist (eine lokal konstanten Funktion an, die nicht konstant ist).

2 Differenzierbarkeit [10 Punkte]

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

Man zeige

(a) f ist partiell differenzierbar

(b) f ist nicht stetig

(c) f ist nicht total differenzierbar

(d) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ im Punkt $(1,0)$?

3 Taylor und Extrema [10 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f(0,0) = 0$, f hat bei $(0,0)$ einen stationären Punkt und

$$H_f = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie, es existiert eine Umgebung U von $(0,0)$, sodass für alle $(x,y) \in U$ gilt $f(x,y) \geq x^2 + y^2$ (Tipp: Taylor-Entwicklung).

4 Implizite Funktionen [12 Punkte]

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^3$ von $(0,0,0)$ gibt , in der das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sin(x - y^2 + z^3) - \cos(x + y + z) + 1 = 0 \\ \sin(y + x^2 - z^3) + \cos(x - y) - 1 = 0 \end{aligned}$$

eindeutig nach (x, y) aufgelöst werden kann (d.h. $(x, y) = h(z)$ mit einer geeigneten Funktion h). Berechnen Sie weiterhin die Ableitung von h im Nullpunkt.

5 Extrema mit Nebenbedingungen [14 Punkte]

Man bestimme die Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) = 2xz - y^2$$

auf der Menge $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ wie folgt:

(a) Wie lauten der Gradient und die Hesse-Matrix von f?

(b) Besitzt f einen stationären Punkt im Inneren von K?

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Kandidaten für Extremwerte von f auf dem Rand ∂K.

(d) In welchen Punkten liegen die globalen Maxima und Minima von $f|_K$?

6 Parametrisierung auf Bogenlänge [4 Punkte]

Geben Sie explizit eine Parametrisierung auf Bogenlänge, $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, der Kettenlinie $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t)(-t, -\cosh t)$.

7 Wegintegrale [7 Punkte]

Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f(x)\mathrm{d}x$:

$$f(x, y, z) = (2z - \sqrt{x^2 + y^2}, z, z^2)$$

,

$$\gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t), 0 \leq t, \leq 2\pi$$

8 Trennbare Differentialgleichung [8 Punkte]

(a) Finden Sie auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen von $yy' = x(1 - y^2)$ mit $y(0) = y_0, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(b) Wie viele konstante Lösungen gibt es?

(c) Wie viele auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen mit $y(0) = 0$ gibt es?

9 Vektorfelder [8 Punkte]

(a) Zeigen Sie: für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, jeweils stetig partiell diferenzierbar, dass

$$\nabla \times (fv) = \nabla f \times v + f \nabla \times v.$$

(b) Berechnen Sie $\nabla \times w(x)$ für $x \neq 0$ mit $w(x_1, x_2, x_3) = ||x|| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.