Übungen zum Ferienkurs Analysis II

Implizite Funktionen und Differentialgleichungen

4.1 Umkehrbarkeit I ⋆

Man betrachte die durch $g(s,t) = (e^s\cos(t), e^s\sin(t))$ gegebene Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass g die Bedingungen des Satzes über Umkehrfunktionen erfüllt, aber nicht injektiv ist

Lösung Wir berechnen die Jacobimatrix von g.

$$J_g = \begin{pmatrix} e^s\cos(t) & -e^s\sin(t) \\ e^s\sin(t) & -e^s\cos(t) \end{pmatrix}$$

Für die Determinante erhalten wir

$$\det J_g = e^{2s}\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right) = e^{2s} > 0 \quad \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

Nach dem Satz über Umkehrfunktionen folgt damit, dass g auf ganz $\mathbb{R}^2$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. g ist aber nicht injektiv denn es gilt $g(s, t + 2\pi) = g(s,t)$.

4.2 Umkehrbarkeit II

Zeige: die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ ist in allen Punkten ein lokaler $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Lösung Die Abbildung ist stetig differenzierbar und wir betrachten die Invertierbarkeit der Jacobi-Matrix

$$J_f = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix}$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix lautet

$$\det J_f = 4x^2 + 4y^2 > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Satz über die Umkehrfunktion.

4.3 Implizite Funktionen I

Zeigen Sie, dass sich die Gleichung $x + y + z = \sin(xyz)$ in einer Umgebung V von $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ eindeutig nach z auflösen lässt. D.h. in einer geeigneten Umgebung U von (0,0) existiert eine Funktion $z = g(x,y)$ mit $f(x,y,z) = x + y + z - \sin(xyz) = 0$.
Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von g an der Stelle (0,0).

Lösung
$f(x,y,z) = x + y + z - \sin(xyz) = 0$
$I_f = \begin{pmatrix} 1 - yz\sin(xyz) & 1 - xz\sin(xyz) & 1 - xy\sin(xyz) \end{pmatrix}$
$\partial_z(0,0,0) = 1 \neq 0$. Damit existiert in einer Umgebung von (0,0) eine Funtion g(x,y) mit f(x,y,g(x,y))=0.
Die Ableitung ergibt sich nach dem Satz über implizite Funktionen.
$D_{(x,y)}g(0,0) = -(D_z f(0,0,g(0,0))^{-1}\, D_{(x,y)} f(0,0,g(0,0)) = (-1,-1)$

4.4 Implizite Funktionen II

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) := x^2 + yz + z^2 - e^z.$$

(a) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung des Punktes (1,0,0) eine Funktion $g(x, y)$ existiert, die die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach $z = g(x, y)$ auflöst.

(b) Wie lautet der Gradient von g im Punkt (1,0)?

$$\square \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung

(a) Beh In einer Umgebung des Punktes (1,0,0) existiert eine Funktion $g(x, y)$, die die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach $z = g(x, y)$ auflöst.

Bew Der Satz über implizite Funktionen aus der Vorlesung würde eine solche Auflösung liefern, falls seine Voraussetzungen erfüllt wären. Wir verifizieren also die Anwendbarkeit dieses Satzes:

(a) Die Funktion ist stetig differenzierbar, $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, da Polynome und die Exponentialfunktion glatt sind.

(b) Die Funktion verschwindet im Punkt (1,0,0), d.h. $f(1, 0, 0) = 0$.

(c) Die Ableitung nach der aufzulösenden Variablen ist am Punkt (1,0,0) ungleich Null,

$$\partial_z f(x, y, z) = y + 2z - e^z, \quad \partial_z f(1, 0, 0) = -1.$$

Der Satz über implizite Funktionen liefert nun die Existenz einer stetig differenzierbaren Funktion g mit $g(1, 0) = 0$ und $f(x, y, g(x, y)) = 0$ in einer Umgebung von $(x, y) = (1, 0)$.

(b) Beh $\nabla g(1, 0) = (2, 0)$
Bew Gemäß der Formel aus der Vorlesung berechnet sich der Gradient von g folgendermaßen

$$\nabla g(1, 0)^T = -(\partial_z f(1, 0, 0))^{-1} \; (\partial_x f(1, 0, 0) \; \partial_y f(1, 0, 0).$$

Da $\partial_x f(x, y, z) = 2x$ und $\partial_y f(x, y, z) = z$, folgt die Behauptung.

$$\square \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boxtimes \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4.5 Lineare Differentialgleichungen

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 0$.

(a) Welche Dimension hat der Lösungsraum der Gleichung?

(b) Welche der folgenden Funktionen von x sind Lösungen der Gleichung?

(i) $-\ln x$

(ii) 0

(iii) 1

(iv) $2e^{-x}$

(v) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

(c) Geben Sie ein Fundamentalsystem der Gleichung an!

(d) Geben Sie die Menge aller reellen Lösungen der Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 3$ an!

Lösung

(a) homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung, ihr Lösungsraum ist also dreidimensional

(b) Die Gleichung hat konstante Koeffizienten, somit sind ihre Lösungen Produkte von Polynomen (maximal 2. Grades) und Exponentialfunktionen, und Linearkombinationen davon. Die Nullfunktion ist immer eine Lösung. Man überprüft leicht, dass auch e^{-x} eine Lösung ist, da -1 Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

(c) Das charakteristische Polynom ist $\chi(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 15\lambda + 9$ mit der aus (b) bekannten Nullstelle -1. Polynomdivision ergibt $\chi(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2+6\lambda+9) = (\lambda+1)(\lambda+3)^2$. Also ist -3 noch eine doppelte Nullstelle. Somit ist $(e^{-x}, e^{-3x}, xe^{-3x})$ Basis des Lösungsraums.

(d) Offenbar ist die konstante Lösung $y(x) = \frac{1}{3}$ Lösung der inhomogenen DGL. Der gesamte Lösungsraum besteht aus der Summe dieser konstanten Lösung und einer beliebigen Lösung des homogenen Systems.

4.6 Separierbare Differentialgleichung I

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = \sqrt{|1 - x^2|}$ mit $x(t) \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Anfangswerte $x(0)$ zur Zeit $t = 0$ ist $x(t) = x(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung?

(b) Bestimmen Sie für den Anfangswert $x(0) = 0$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.
Hinweis: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in [-1, 1]$.

(c) Ist die Lösung der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = -1$ eindeutig bestimmt? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Lösung

(a) Ist eine Lösung $x(t) = c$ konstant, so folgt $\dot{x}(t) = 0$ also $\sqrt{1 - x(t)^2} = 0$, somit $x(t) = x(0) = \pm 1$. Dies sind offenbar auch Lösungen.

(b) Trennung der Variablen im Bereich $x \in]-1, 1[$ führt auf das Integral

$$G(x) := \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = t - t_0$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist $G(x) = \arcsin(x)$, definiert für $x \in]-1, 1[$.
Einsetzen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liefert $G(0) = 0 = 0 - t_0$, also $t_0 = 0$. Auflösen von $G(x) = t$ für $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ nach x liefert das Ergebnis $x(t) = \sin t$. Dieses kann nach links durch $x(t) = -1$ für $t \leq -\frac{\pi}{2}$ und nach rechts durch $x(t) = 1$ für $t \geq \frac{\pi}{2}$ stetig differenzierbar fortgesetzt werden.

(c) Nein, die Lösung ist nicht eindeutig. Neben $x(t) = -1$ ist z.B. auch $x(t-5)$ mit dem $x(t)$ aus (b) eine Lösung des Anfangswertproblems.
Das liegt daran, dass $\sqrt{1-x^2}$ bei $x = \pm 1$ nicht Lipschitzstetig ist.

4.7 Separierbare Differentialgleichung II

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t,x)$ mit $f(t,x) = te^{t+x}$.

(a) Geben Sie ein erstes Integral (Konstante der Bewegung) für die Differentialgleichung an.

(b) Geben Sie eine maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ an.

(c) Welche Eigenschaften besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die hinreichend sind für die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen obiger Differentialgleichung?

☐ f ist stetig
☐ f ist erstes Integral
☐ f ist stetig differenzierbar
☐ f ist lipschitzstetig
☐ f ist lokal lipschitzstetig

(d) Ist die maximale Lösung des AWP $\dot{x} = f(t,x), x(0) = 0$ eindeutig bestimmt?

Lösung

(a) Trennung der Variablen liefert

$$\dot{x}e^{-x} = te^t.$$

Somit ist $F(t,x) = \int e^{-x}dx - \int te^t dt = -e^{-x} - te^t + \int 1 \cdot e^t dt = -e^{-t} + (1-t)e^t$ eine Konstante der Bewegung.

(b) Auflösen der Gleichung $F(t,x) = F(0,x(0)) = 0$ nach x ergibt $x(t) = \ln \frac{1}{(1-t)e^t}$ mit der richtigen Anfangsbedingung. Der Definitionsbereich der maximalen Lösung ist der Bereich, wo das Argument des Logarithmus positiv ist, also für $t \in]-\infty, 1[$.

(c) Stetige Differenzierbarkeit und die daraus folgende lokale Lipschitzstetigkeit sind hinreichend für die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Stetigkeit genügt i.A. nicht. f ist weder erstes Integral noch lipschitzstetig.

☐ f ist stetig
☐ f ist erstes Integral
☒ f ist stetig differenzierbar
☐ f ist lipschitzstetig
☒ f ist lokal lipschitzstetig

(d) Ja - aus lokaler Eindeutigkeit von Lösungen folgt schon die Eindeutigkeit maximaler Lösungen.

4.8 Lineares Differentialgleichungssystem ⋆

Lösen sie das AWP $\dot{x} = Ax$ mit $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Schreiben Sie das System als eine Differentialgleichung höherer Ordnung für x_1.

Lösung Ausgeschrieben ist

$$\dot{x_1} = 2x_2\dot{x_2} = 2x_3\dot{x_3} = -x_1 + x_2$$

also $\ddot{x_1} = 2\dot{x_2} = 4x_3$ und $\dddot{x_1} = 4\dot{x_3} = -4x_1 + 4x_2$.
Also lösen wir

$$\dddot{x_1} - 2\dot{x_1} + 4x_1 = 0$$

mit den Anfangswerten $x_1(0) = 5$, $\dot{x_1}(0) = 2x_2(0) = 6$ und $\ddot{x_1}(0) = 2\dot{x_2}(0) = 4x_3(0) = 12$. Das charakteristische Polynom $\lambda^3 - 2\lambda + 4$ mit der (erratenen) Nullstelle $\lambda_1 = -2$.
Polynomdivision ergibt

$$(\lambda^3 - 2\lambda + 4) : (\lambda + 2) = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

die weiteren Nullstellen sind $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$.
Ein reelles Fundamentalsystem ist also

$$e^{-2t}, e^t \cos t, e^t \sin t.$$

Wir suchen α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass $x_1(t) = \alpha e^{-2t} + \beta e^t \cos t + \gamma e^t \sin t$ die Anfangsbedingungen erfüllt.
Taylorentwicklung:

$$e^{-2t} = 1 - 2t + 2t^2 + ...$$
$$e^t \cos t = (1 + t + \frac{1}{2}t^2 + ...)(1 - \frac{1}{2}t^2 + ...) = 1 + t + \mathcal{O}(t^3)$$
$$e^t \sin t = (1 + t + \frac{1}{2}t^2 + ...)(t - \frac{1}{6}t^3 + ...) = t + t^2 + \mathcal{O}(t^3)$$

Somit gilt:

$$x_1(t) = \alpha + \beta + t(-2\alpha + \beta + \gamma) + t^2(2\alpha + \gamma) + \mathcal{O}(t^3).$$

Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= x_1(0) = 5, \\ -2\alpha + \beta + \gamma &= \dot{x_1}(0) = 6, \\ 2\alpha + \gamma &= \frac{1}{2}\ddot{x_1}(0) = 6, \end{aligned}$$

Also

$$\gamma = 6 - 2\alpha$$
$$-4\alpha + \beta = 0,$$

somit $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = 4$.
Die Lösung des AWPs lautet also

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-2t} + 4e^t(\cos t + \sin t) \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}\dot{x_1}(t) = \frac{1}{2}(-2e^{-2t} + 4e^t(\cos t + \sin t) + 4e^t(-\sin t + \cos t)) = -e^{-2t} + 4e^t \cos t \\ x_3(t) &= \frac{1}{2}\dot{x_2}(t) = \frac{1}{2}(2e^{-2t} + 4e^t(\cos t - \sin t)) = e^{-2t} + 2(\cos t - \sin t) \end{aligned}$$

4.9 RC-Glied

Ein periodisch angeregtes RC-Glied (R=Widerstand, C=Kondensator) lässt sich in dimensionsloser Form folgenderweise darstellen.

$$\dot{x} + x = Asin(\omega t), \qquad \omega > 0$$

Lösen Sie die DGL als Summe aus allgemeiner Lösung der homogenen DGL und partikulärer Lösung der inhomogenen DGL.

Lösung

1) Lösung der homogenen DGL $\dot{x} + x = 0$: $\quad x(t) = c_1 e^{-t}$

2) Partikuläre Lösung des der inhomogenen DGL: $x(t) = c_2 sin(\omega t) + c_3 cos(\omega t)$

3) Gesamtlösung: $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 sin(\omega t) + c_3 cos(\omega t)$.
Bestimme c_1 über $x(0) = x_0 = c_1 + c_2$
$x(t) = (x_0 - c_3)e^{-t} + c_2 sin(\omega t) + c_3 cos(\omega t)$

4.10 Trennung der Variablen

Lösen Sie die folgenen DGLs durch Trennung der Variablen.

i) $y' = y^2 x$

ii) $(2x - 1)y' = 2y \qquad y(0) = 3$

iii) $(x^2 - 1)y' = 2y \qquad y(0) = 5$

Lösung

i) $\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx \qquad -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}^2 + c \qquad y = -\frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + c}$

ii) $y(x) = c(2(x-1) \qquad y(0) = 3 \qquad y(x) = 3 - 6x$

iii) $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x^2-1} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx$ Das Integral existiert nur für $x \neq \pm 1$
$ln|y| - ln|c| = ln|\frac{x-1}{x+1} \qquad y = c\frac{x-1}{x+1} \qquad y(0) = 5$
$y = \begin{cases} x \neq \pm 1 & y = \frac{1-x}{x+1} \\ x = \pm 1 & y = 0 \end{cases}$

4.11 Oszillierende Platte

Eine in der x-z-Ebene unendlich ausgedehnte dünne (2D-)Platte bei $y = 0$ befindet sich in einem inkompressiblen Fluid (Viskosität ν) und oszilliert in x-Richtung mit der Geschwingkeit $U cos(\omega t)$. Das Geschwindigkeitsfeld des Fluids lässt sich durch die Navier-Stokes-Gleichung beschreiben.

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad v = \begin{pmatrix} v_x(y,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die DGL gelöst wird durch

$$v(y,t) = Ue^{-ky} cos(ky - \omega t), \qquad k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

Hinweis: Verwenden Sie die no-slip Bedingung (Geschwindigkeit des Fluids an der Oberfläche der Platte ist gleich der Geschwindigkeit der Platte selbst) und $v = 0$ für y $\to \infty$ und den Ansatz $v_x = Re(f(y)e^{i\omega t})$.

Lösung
Setze Ansatz $v_x = Re(f(y)e^{i\omega t})$ in Navier Stokes Gleichung $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ ein.
$\to i\omega f(y) e^{i\omega t} = \nu f''(y) e^{i\omega t} \qquad (1)$

Ansatz für f: $f(y) = e^{ay}$, Setze $f(y)$ in (1) ein.
$\rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{\omega}{\nu}\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \pm k(1+i)$
$\rightarrow f(y) = Ae^{ky(1+i} + Be^{-ky(1+i)}$
Bestimme A,B: $f(y \rightarrow \infty) = 0 \rightarrow A = 0$
$v_x = Re\left(Be^{-ky(1+i)}ei\omega t\right) = Re\left(Be^{-ky}ei(\omega t - ky)\right) = Be^{-ky}cos(ky - \omega t)$
$v_x(y = 0) = Ucos(\omega t) \rightarrow B = U$

4.12 Charakteristisches Polynom

Lösen Sie die DGL $3y'' + 2y' - y = 0$ mit den Randbedingungen y(1)=2 und y'(1)=0 mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.

Lösung
Charakteristisches Polynom: $3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \qquad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}$
Lösung der DGL: $y(t) = a_1e^{-t} + a_2e^{\frac{1}{3}t} \qquad y'(t) = -a_1e^{-t} + \frac{1}{3}a_2e^{\frac{1}{3}t}$
Bestimmung der Koeffizienten über Randbedingungen: $\rightarrow$ lineares Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{\frac{1}{3}} \\ -e^{-1} & \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Löse Gleichungssystem mit Gaußschen Additionsverfahren:
$$\begin{pmatrix} [cc|c]e^{-1} & e^{\frac{1}{3}} & 2 \\ -e^{-1} & \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} [cc|c]e^{-1} & 0 & 0.5 \\ 0 & \frac{1}{3}e^{\frac{4}{3}} & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5e \\ 1.5e^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

4.13 Gradienten Systeme

a) Seit dx/dt=f(x,y) und dy/dt=g(x,y). Zeigen Sie, dass, falls es sich um ein Gradientensystem handelt, gilt: df/dy=dg/dx

b) Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Systemen um Gradientensysteme handelt? Konstruieren Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion U(x,y).

   i) $\dot{x} = y^2 + ycos(x), \qquad \dot{y} = 2xy + sin(x)$

   ii) $\dot{x} = 3x^2 - 1 - e^{2y}, \qquad \dot{y} = -2xe^{2y}$

Lösung

a) Falls es sich um ein Gradientensystem handelt gilt:

$$\dot{x} = f(x,y) = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \dot{y} = g(x,y) = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

b) i)

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + ycos(x) = 2y + cos(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + sin(x) = 2y + cos(x)$$

Es handelt sich also um ein Gradientensystem. Integriere partiell, um ein Potential zu finden.

$$\int(y^2 + ycos(x))dx = y^2x + ysin(x) + c_1(y) = -U(x,y) \quad \text{mit} \quad c_1(x) = 0$$

$\int(2xy + sin(x))dy = y^2x + ysin(x) + c_2(x) = -U(x, y) \quad \text{mit} \quad c_2(y) = 0$

ii) $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -2e^{2y}$

$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) = -2e^{2y}$

Es handelt sich ebenfalls um ein Gradientensystem. Integriere wieder partiell.

$\int(3x^2 - 1 - e^{2y})dx = x^3 - x - xe^{2y} + c_1 y = -U(x, y) \quad \text{mit} \quad c_1(y) = 0$

$\int(-2xe^{2y})dy = -xe^{2y} + c_2(x) = -U(x, y) \quad \text{mit} \quad c_2(x) = x^3 - x$