# Übungen zum Ferienkurs Analysis II

## Implizite Funktionen und Differentialgleichungen

### 4.1 Umkehrbarkeit I ⋆

Man betrachte die durch $g(s,t) = (e^s \cos(t), e^s \sin(t))$ gegebene Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $g$ die Bedingungen des Satzes über Umkehrfunktionen erfüllt, aber nicht injektiv ist

### 4.2 Umkehrbarkeit II

Zeige: die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ ist in allen Punkten ein lokaler $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

### 4.3 Implizite Funktionen I

Zeigen Sie, dass sich die Gleichung $x + y + z = \sin(xyz)$ in einer Umgebung V von $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ eindeutig nach z auflösen lässt. D.h. in einer geeigneten Umgebung U von (0,0) existiert eine Funktion $z = g(x,y)$ mit $f(x,y,z) = x + y + z - \sin(xyz) = 0$.
Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von $g$ an der Stelle (0,0).

### 4.4 Implizite Funktionen II

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := x^2 + yz + z^2 - e^z.$$

(a) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung des Punktes (1,0,0) eine Funktion $g(x,y)$ existiert, die die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ nach $z = g(x,y)$ auflöst.

(b) Wie lautet der Gradient von $g$ im Punkt (1,0)?

$$\square \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

### 4.5 Lineare Differentialgleichungen

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 0$.

(a) Welche Dimension hat der Lösungsraum der Gleichung?

(b) Welche der folgenden Funktionen von x sind Lösungen der Gleichung?

- (i) $-\ln x$
- (ii) $0$
- (iii) $1$
- (iv) $2e^{-x}$
- (v) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

(c) Geben Sie ein Fundamentalsystem der Gleichung an!

(d) Geben Sie die Menge aller reellen Lösungen der Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 3$ an!

### 4.6 Separierbare Differentialgleichung I

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = \sqrt{|1 - x^2|}$ mit $x(t) \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche Anfangswerte $x(0)$ zur Zeit $t = 0$ ist $x(t) = x(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung?

(b) Bestimmen Sie für den Anfangswert $x(0) = 0$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.
HINWEIS: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in [-1, 1]$.

(c) Ist die Lösung der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = -1$ eindeutig bestimmt? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

### 4.7 Separierbare Differentialgleichung II

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ mit $f(t, x) = te^{t+x}$.

(a) Geben Sie ein erstes Integral (Konstante der Bewegung) für die Differentialgleichung an.

(b) Geben Sie eine maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ an.

(c) Welche Eigenschaften besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die hinreichend sind für die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen obiger Differentialgleichung?

- ☐ f ist stetig
- ☐ f ist erstes Integral
- ☐ f ist stetig differenzierbar
- ☐ f ist lipschitzstetig
- ☐ f ist lokal lipschitzstetig

(d) Ist die maximale Lösung des AWP $\dot{x} = f(t, x), x(0) = 0$ eindeutig bestimmt?

### 4.8 Lineares Differentialgleichungssystem ⋆

Lösen sie das AWP $\dot{x} = Ax$ mit $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
HINWEIS: Schreiben Sie das System als eine Differentialgleichung höherer Ordnung für $x_1$.

### 4.9 RC-Glied

Ein periodisch angeregtes RC-Glied (R=Widerstand, C=Kondensator) lässt sich in dimensionsloser Form folgenderweise darstellen.

$$\dot{x} + x = Asin(\omega t), \qquad \omega > 0$$

Lösen Sie die DGL als Summe aus allgemeiner Lösung der homogenen DGL und partikulärer Lösung der inhomogenen DGL.

### 4.10 Trennung der Variablen

Lösen Sie die folgenen DGLs durch Trennung der Variablen.

i) $y' = y^2 x$

ii) $(2x-1)y' = 2y \qquad y(0) = 3$

iii) $(x^2-1)y' = 2y \qquad y(0) = 5$

## 4.11 Oszillierende Platte

Eine in der x-z-Ebene unendlich ausgedehnte dünne (2D-)Platte bei $y = 0$ befindet sich in einem inkompressiblen Fluid (Viskosität $\nu$) und oszilliert in x-Richtung mit der Geschwingkeit $Ucos(\omega t)$. Das Geschwindigkeitsfeld des Fluids lässt sich durch die Navier-Stokes-Gleichung beschreiben.

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad v = \begin{pmatrix} v_x(y,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die DGL gelöst wird durch

$$v(y,t) = Ue^{-ky} cos(ky - \omega t), \qquad k = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

Hinweis: Verwenden Sie die no-slip Bedingung (Geschwindigkeit des Fluids an der Oberfläche der Platte ist gleich der Geschwindigkeit der Platte selbst) und $v = 0$ für y $\to \infty$ und den Ansatz $v_x = Re(f(y)e^{i\omega t})$.

## 4.12 Charakteristisches Polynom

Lösen Sie die DGL $3y'' + 2y' - y = 0$ mit den Randbedingungen y(1)=2 und y'(1)=0 mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.

## 4.13 Gradienten Systeme

a) Seit dx/dt=f(x,y) und dy/dt=g(x,y). Zeigen Sie, dass, falls es sich um ein Gradientensystem handelt, gilt: df/dy=dg/dx

b) Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Systemen um Gradientensysteme handelt? Konstruieren Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion U(x,y).

   i) $\dot{x} = y^2 + ycos(x), \qquad \dot{y} = 2xy + sin(x)$

   ii) $\dot{x} = 3x^2 - 1 - e^{2y}, \qquad \dot{y} = -2xe^{2y}$