Übungen zum Ferienkurs Analysis II

Vektoranalysis und Kurven

3.1 Vektoranalysis

a) Seien $F \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Welche Aussagen sind richtig?

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0, \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{grad}\operatorname{div} F = 0, \quad \operatorname{grad}\operatorname{rot} F = 0.$$

b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2, y^2, -z^2)$. Wie lautet $\nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F$?

Lösung:

a) Genau die ersten beiden Aussagen sind richtig. Dies wurde in den Übungen gezeigt. Die dritte Aussage ist falsch: Betrachten wir dazu zum Beispiel $F(x, y, z) = (\frac{x^2}{2}, 0, 0)$ mit $\operatorname{grad}\operatorname{div} F(x, y, z) = (1, 0, 0) \neq 0$. Die linke Seite der vierten Aussage ist nicht definiert.

b) Wir berechnen direkt oder benutzen die Formel aus den Übungen:

$$\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F.$$

Da $\nabla \times F = 0$, folgt als Ergenis der Nullvektor.

3.2 Koordinatentransformation

Sei $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^- \times 0)$ und $\Phi : U \to V$ die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 - \xi_2^2 \\ 2\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme $D\Phi(\xi)$, das normierte Zweibein $e_{\xi_1}(\xi), e_{\xi_2}(\xi)$ und $D\Phi^{-1}(\Phi(\xi))$.

(b) Sei $f \in \mathcal{C}\infty(U, \mathbb{R})$ und $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1} : V \to \mathbb{R}$. Drücke den Gradienten von $\tilde{f}$ durch Ableitungen von f in der Basis e_{ξ_1}, e_{ξ_2} aus.

Lösung

(a)

$$\mathrm{D}\Phi(\xi) = 2\begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{D}\Phi^{-1}(\Phi(\xi)) = \mathrm{D}\Phi(\xi)^{-1} = \frac{1}{2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}$$

$$e_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$$e_2(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}\begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$$

(b) Laut Vorlesung ist

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix}\tilde{f} = D\Phi(\xi)^{T^{-1}}\begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} \\ \partial_{\xi_2} \end{pmatrix} f = \frac{1}{2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}\begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} \\ \partial_{\xi_2} \end{pmatrix} f$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}(e_{\xi_1}\partial_{\xi_1} + e_{\xi_2}\partial_{\xi_2}) f$$

3.3 Krümmung einer Raumkurve

Parametrisieren Sie die Raumkurve $\gamma(t) = \frac{1}{2}\exp(t)(\cos t, \sin t\sqrt{2}), t \in \mathbb{R}$, auf Bogenlänge, bezeichnet mit $\tilde{\gamma}(s)$, und berechnen Sie dafür die Krümmung $\kappa(s)$.

Lösung: $||\dot{\gamma}(t)|| = \frac{1}{2}\exp(t)\left\|\begin{pmatrix}\cos t - \sin t\\ \sin t + \cos t\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\exp(t)\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 2} = \exp t.$
Also ist zum Beispiel $\tilde{s}(t) = \int_{-\infty}^{t} \|\dot{\gamma}(t')dt'\| = \int_{-\infty}^{t} \exp(t')dt' = \exp t$. Mit $\tilde{t}(s) = \ln s$ ist also $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tilde{t}$ auf Bogenlänge parametrisiert, $s > 0$. $T(s) = \dot{\tilde{\gamma}}(s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\ln s - \sin\ln s\\ \sin\ln s + \cos\ln s\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ und $\kappa(s) = \|\dot{T}(s)\| = \frac{1}{2s}\left\|\begin{pmatrix}-\sin\ln s - \cos\ln s\\ \cos\ln s - \sin\ln s\\ 0\end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt{2}}{2s}$.

3.4 Kurven

Ein Abschnitt der Kettenlinie ist gegeben durch die Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \cosh x$.

a) Geben Sie eine Parametrisierung $\gamma : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ des Graphen von f als Kurve im $\mathbb{R}^2$ an.

b) Parametrisieren Sie γ auf Bogenlänge.

a) $\gamma(t) = \begin{pmatrix}t\\ \cosh t\end{pmatrix}, t \geq 0$

b) Wir berechnen die Bogenlänge von γ,

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma(t')\|dt' = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2 t'}dt' = \int_0^t \cosh t'dt' = \sinh t.$$

mit der Umkehrabbildung $t(s') := s^{-1}(s') = \operatorname{arcsinh}(s')$. Die Parametrisierung auf Bogenlänge lautet dann

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) = \begin{pmatrix}\operatorname{arcsinh}(s)\\ \cosh(\operatorname{arcsinh}(s))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\operatorname{arcsinh}(s)\\ \sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arcsinh}(s))}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\operatorname{arcsinh}(s)\\ \sqrt{1 + s^2}\end{pmatrix}.$$

3.5 Kurvenintegral

Sei $F \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Kraftfeld und $\gamma \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^3), t \to \gamma(t)$, die Bahn eines Teilchens der Masse $m = 1$, welches sich gemäß des 2. Newtonschen Gesetzes $F(\gamma(t)) = m\ddot{\gamma}(t)$ im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ von $\gamma(t_0) = (0, 0, 0)$ nach $\gamma(t_1) = (1, 1, 1)$ bewege und bei $\gamma(t_0)$ die Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ und bei $\gamma(t_1)$ den Geschwindigkeitsbetrag $\|\dot{\gamma}(t_1)\| = 2$ besitze. Berechnen Sie die von F geleistete Arbeit, das heißt das Kurvenintegral von F entlang der Teilchenbahn γ.

Lösung: Die Arbeit ist gleich der Differenz der kinetischen Energie. Wir integrieren also die Kraft entlang des Weges,

$$\int_\gamma F(r)\cdot dr = \int_{t_0}^{t_1} dtF(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \ddot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t)dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt = \frac{1}{2}(\|\dot{\gamma}(t_1)\|^2 - \|\dot{\gamma}(t_0)\|^2) = 2$$

3.6 Kurve

Gegeben sei die geschlossene, gegen den Uhrzeigersinn orientiert Kurve

$$\vec{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ -2\sin t \end{pmatrix}, -\pi \leq t < \pi,$$

sowie die Funktion $f := \frac{6x}{\sqrt{4x+4-y^2}}$

(a) Man bestimme die Parameterwerte, für die $\vec{\gamma}(t)$ eine horizontale oder vertikale Tangente besitzt. Ist $\vec{\gamma}(t)$ für $t \in [-\pi, \pi[)$ regulär?

(b) Man berechne $\int_{\vec{\gamma}} f ds$.

Lösung: blabla

(a) Wir berechnen zuerst den Tangentialvektor:

$$T = \vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -2\cos t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{\gamma}(t)$ besitzt eine horizontale Tangente, wenn $y = const.$ und damit $T_y = 0$:

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

also

$$t = \frac{\pi}{2}$$

$\vec{\gamma}(t)$ besitzt eine vertikale Tangente, wenn $x = const.$ und damit $T_x = 0$:

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

also

$$t = 0.$$

(b) Zur Berechnung des Kurvenintegrals benutzen wir folgende Formel:

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} f ds &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{6t^2}{\sqrt{4t^2+4-4\sin^2 t}} \cdot 2\sqrt{t^2+\cos^2 t}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{6t^2\sqrt{t^2+\cos^2 t}}{\sqrt{t^2+1-\sin^2 t}}dt \end{aligned}$$

mit $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ erhalten wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} 6t^2 dt = \left[2t^3\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi^3 + 2\pi^3 = 4\pi^3$$

3.7 Vektorfelder

a) Zeigen Sie für $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dass

$$\nabla \times (fF) = \nabla f \times F + f\nabla \times F.$$

b) Berechnen Sie $\nabla \times G(x)$ für $x \neq 0$ mit $G(x_1, x_2, x_3) = \|x\|^2 \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) komponentenweise gilt

$$(\nabla \times (fF))_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j (fF_k) = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} (\partial_j f) F_k + \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} f (\partial_j F_k) = (\nabla f \times F)_i + f(\nabla \times F)_i$$

woraus die Angabe folgt.

b) Es ist $\operatorname{grad} \|x\|^2 = 2x$ und $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\operatorname{rot} G(x) = \operatorname{grad} \|x\|^2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_2^2 - x_3^2 \\ x_3 - x_1 x_2 \\ x_1 x_3 - x_2 \end{pmatrix}.$$

3.8 Neilsche Parabel

Parametrisieren Sie die durch die Punktmenge $y^2 - x^3 = 0 \subset \mathbb{R}^2$ gegebene Kurve nach der Bogenlänge.

Lösung Eine mögliche Parametrisierung erhält man durch Auflösen nach x:

$$\gamma_1(y) = \begin{pmatrix} |y|^{\frac{2}{3}} \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R},$$

diese ist allerdings nicht differenzierbar bei $y = 0$.
Eine glatte Parametrisierung erhält man duch

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

diese ist allerdings singulär bei $t = 0$ ($\gamma_2'(0) = 0$). Davon ausgehend berechnen wir die Bogenlänge, zunächst für $T \geq 0$:

$$s(T) = \int_0^T ||\dot{\gamma}_2(t)||dt = \int_0^T \sqrt{4t^2 + 9t^4}dt = \left[\frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^T = \frac{1}{27}(4 + 9T^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}.$$

Für die Umkehrfunktion gilt $T(s)^2 = \frac{1}{9}[(27s + 8)^{\frac{2}{3}} - 4] = (s + \frac{8}{27})^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}$. Aus Symmetriegründen ist dann die Parametrisierung nach Bogenlänge für $s \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} T(|s|)^2 \\ \operatorname{sgn}(s) T(|s|)^3 \end{pmatrix}$$

3.9 Wegintegrale

Berechnen Sie jeweils das Wegintegral $\int_\gamma f(x) \mathrm{d}x$.

(i) $f(x, y) = (e^x, xy)$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$

(ii) $f(x, y) = (\sin(x), x^2 + y^2)$, $\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1) & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$

(iii) $f(x, y, z) = (y, -z, x)$, $\gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t)), 0 \leq t \leq \ln(2)$

(iv) $f(x, y, z) = (2z - \sqrt{x^2 + y^2}, z, z^2)$, $\gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t), 0 \leq t, \leq 2\pi$

Lösung

(i)

$$\int_\gamma f(x,y)d(x,y) = \int_0^{2\pi} (e^{\cos(t)}, \cos(t)\sin(t)) \cdot \big(-\sin(t)\cos(t)\big)\, dt = \int_0^{2\pi} -\sin(t)e^{\cos(t)} + \cos^2(t)\sin(t)dt$$

mit $\cos(t) = x \Rightarrow$

$$\int_{\cos(0)}^{\cos(2\pi)} e^x - x^2 dx = 0$$

(ii)

$$\int_\gamma f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 (\sin(t), t^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 (\sin(1), 1 + (t-1)^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$-\cos(1) + 1 + \int_1^2 t^2 - 2t + 2dt = -\cos(1) + \frac{7}{3}$$

(iii)

$$\int_\gamma f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_0^{\ln(2)} (\cosh(t), -\sinh(t), \sinh(t)) \cdot \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{pmatrix} dt =$$

$$\int_0^{\ln(2)} \cosh^2(t) - \sinh^2(t) + \cosh(t)\sinh(t)dt = \int_0^{\ln(2)} 1 + \cosh(t)\sinh(t)dt$$

mit $\sinh(t) = x \Rightarrow$

$$\ln(2) + \int_0^{\frac{3}{4}} xdx = \ln(2) + \frac{9}{32}$$

(iv)

$$\int_\gamma f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} (2t - t, t, t^2) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} t\cos(t)dt + \int_0^{2\pi} t\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} t^2\cos(t)dt - \int_0^{2\pi} t^2\sin(t)dt + \int_0^{2\pi} t^2dt$$

mit partieller Integration $\Rightarrow$

$$\frac{8}{3}\pi^3 + 4\pi^2 + 2\pi$$

3.10 Länge von Kurven

Berechnen Sie die Länge der folgenden Kurven:

(i) $\gamma_1(t) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t))$ mit $0 \le t \le 2\pi, a > 0$ fest.

(ii) $\gamma_2(t) = (t^2, t^3)$ mit $0 \le t \le 4$.

Lösung

(i) $\gamma_1(t)$ ist stetig diffbarer Bogen mit $\gamma_1'(t) = (3a\cos^2 t(-\sin t), 3a\sin^2 t\cos t) \Rightarrow$

$$L(\gamma_1) = \int_0^{2\pi} ||\gamma_1'(t)||_2 dt = \int_0^{2\pi} (9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} |3a\cos t\sin t|(\cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} dt = 3a\int_0^{2\pi} |\cos t\sin t| dt$$

mit Additionstheorem $\Rightarrow$

$$3a\int_0^{2\pi} |\frac{1}{2}\sin 2t| dt = 3a\frac{1}{2}4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6a$$

(ii) $\gamma_2(t)$ ist stetig diffbarer Bogen mit $\gamma_2'(t) = (2t, 3t^2) \Rightarrow$

$$L(\gamma_2) = \int_0^4 ||\gamma_2'(t)||_2 dt = \int_0^4 (4t^2 + 9t^4)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^4 t(4 + 9t^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

mit $\varphi(t) = 4 + 9t^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{18}\int_0^4 (\varphi(t))^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)dt = \frac{1}{18}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(4)} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{54}\Bigg|_4^{148} = \frac{1}{27}(148^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}})$$

3.11 Flächeninhalt der Kardioide

Sei $a > 0$ und $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_0^+$ die Parametrisierung der Kardioide in Polarkoordinaten,

$$r(\phi) = a(1 + \cos\ \phi).$$

Berechne den Flächeninhalt der Kardioide.

Lösung Der von einer Kurve in Polarkoordinaten $r(\phi)$ eingeschlossene Flächeninhalt lautet:

$$\begin{aligned}
F &= \int_0^r dr' \int_0^{2\pi} d\phi\, r'(\phi) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\phi)^2 d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a(1+\cos\phi))^2 d\phi \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\phi + \cos^2\phi) d\phi = \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{2\pi} d\phi + 2\int_0^{2\pi}\cos\phi d\phi + \int_0^{2\pi}\cos^2\phi d\phi\right) \\
&= \frac{a^2}{2}\left(2\pi + 2[\sin\phi]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left[\phi + \frac{1}{2}\sin(2\phi)\right]_0^{2\phi}\right) = \frac{3\pi}{2}a^2
\end{aligned}$$

3.12 Krümmung einer Klothoide

Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(\frac{u^2}{2}) du \\ \int_0^t \sin(\frac{u^2}{2}) du \end{pmatrix}$$

an der Stelle $t > 0$ gleich ihrer Länge $L(t)$ ist.
Hinweis: Die Krümmungsformel lautet

$$\kappa = \left| \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \right|, \text{ wobei } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

.

Lösung Sei $t > 0$. Wir berechnen zuerst die Krümmung mit der Formel aus dem Hinweis.

$$\dot{x}(t) = \cos\frac{t^2}{2},\ \ddot{x}(t) = -t\sin\frac{t^2}{2}$$

$$\dot{y}(t) = \sin\frac{t^2}{2},\ \ddot{y}(t) = t\cos\frac{t^2}{2}$$

Einsetzen ergibt: $\kappa(t) = t$
Die Länge berechnet sich aus

$$L(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(u)|du = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2}du = t.$$

Wer noch mehr üben möchte:

3.13 Kreisumfang

Berechnen Sie den Umfang U des Kreises um (0,0) mit Radius r¿0. Betrachten Sie dazu das Kurvenintegral $4\int_k 1ds$, bei dem k der Viertelkreisbogen ist. Wählen Sie eine geeignete Parametrisierung und berechnen Sie das Integral.

Lösung

$r^2 = x^2 + y^2 \qquad y = \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad 0 \leq x \leq r \qquad \gamma = \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{r^2 - x^2} \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}} \end{pmatrix}$

$L = \int\limits_0^r ||\dot{\gamma(x)}||dx = \int\limits_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}}dx \int\limits_0^r \sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}} = r\int\limits_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2-x^2}} = r \cdot \arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = r \cdot \frac{\pi}{2}$

$U = 4L = 2\pi r$

3.14 Kurvenintegral über Ellipse

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_k \sqrt{\frac{a^2y^2}{b^2} + \frac{b^2x^2}{a^2}}ds$$

über die Ellipse k

$$x^2a^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Wählen Sie für die Ellipse eine geeignete Parametrisierung.

Lösung:

$\gamma = \begin{pmatrix} a(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \qquad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin t \\ b \cdot \cos t \end{pmatrix}$

$\int\limits_0^{2\pi} f(x(t), y(t))||\dot{\gamma}||dt = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$
$a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t dt + b^2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi(a^2 + b^2)$

3.15 Kettenlinie

Ein ideales Seil wird über einen 2km breiten Abgrund gespannt und wird durch die Kurve $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(x) = (x, f(x)$ und $f(x) = \frac{1}{a}(\cosh(ax) - \cosh(a)$ mit $a > 0$ beschrieben (Einheit 1km).

a) Berechnen Sie die Länge des Seils in Abhängigkeit von a.

b) Berechnen Sie die Krümmung des Seils am Scheitel und an den Rändern.

c) Wie stark hängt das Seil in erster Näherung durch, wenn es 1mm, 10cm, bzw. 1m zu lang ist?

Lösung

a) $L(\gamma) = \int\limits_{-1}^{1} ||\dot{\gamma(x)}||dx = \int\limits_{-1}^{1} ||(1, \sinh(ax))||dx = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2(ax)} dx = \int\limits_{-1}^{1} \cosh a(x) dx = \frac{2}{a} \sinh(a)$

b) $\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a \cosh(ax)}{(1+\sinh^2(ax))^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{\cosh^2(ax)}$ $\qquad \kappa(0) = a$ und $\kappa(\pm 1) = \frac{a}{\cosh^2 a}$

c) $\Delta l = \frac{2}{a} \sinh(a) - 2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^4}{60} + ...$ $\qquad d = \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} + ...\right) \approx \frac{1}{2}\sqrt{3\Delta l} \approx 0.866\sqrt{\Delta l}$

i) $\Delta l = 1mm = 10^{-6}km \qquad \Rightarrow d \approx 0.866m$

ii) $\Delta l = 10cm = 10^{-4}km \qquad \Rightarrow d \approx 8.66m$

iii) $\Delta l = 1m = 10^{-3}km \qquad \Rightarrow d \approx 27.386m$

3.16 Schraubenlinie

Die Kurve $\gamma(t) := (r \cos(t), r \sin(t), ct)$ mit $c, r > 0$ heißt Schaubenlinie.

a) Parametrisieren Sie γ nach der Bogenlänge. (Verwenden Sie $R^2 = c^2 + r^2$)

b) Berechnen Sie Tangentialeinheitsvektor, Normalenvektro und Krümmung der nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve.

Lösung:

a) $\gamma'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t), c) \qquad ||\gamma'(t)||_2^2 = r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t) + c^2 = r^2 + c^2 = R^2$
$l(\tau) := \int\limits_0^{\tau} ||\gamma_c'(t)||_2 dt = \int\limits_0^{\tau} R dt = R\tau$
Die gesuchte Parametertransformation ist als gegeben durch $t = \varphi(s) = l^{-1}(s) = \frac{s}{R}$
Die nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist also $\tilde{\gamma}(s) = (r \cos(\frac{s}{R}), r \sin(\frac{s}{R}), \frac{cs}{R})$

b) $\tau(s) = \tilde{\gamma}'(s) = (-\frac{r}{R} \sin(\frac{s}{R}), \frac{r}{R} \cos(\frac{s}{R}), \frac{c}{R}) \qquad \tau'(s) = (-\frac{r}{R^2} \cos(\frac{s}{R}), -\frac{r}{R^2} \sin(\frac{s}{R}), 0)$
$\kappa(s) = ||\tau'(s)||_2 = \sqrt{\frac{r^2}{R^4}[(\cos^2(\frac{s}{r}) + \sin^2(\frac{s}{r}]} = \frac{r}{R^2}$
$n(s) = \frac{\tau'(s)}{\kappa(s)} = (-\cos(\frac{s}{R}, -\sin(\frac{s}{R}), 0)$

3.17 Kurvenlänge

a) $\gamma(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ heißt Zykloide. Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma|_{[-\pi,\pi]}$.

b) Finden Sie die singulären Punkte der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos^3(t)\sin(t), \sin^3(t))$ und berechnen Sie ihre Bogenlänge.

Lösung:

a) $||\gamma'(t)|| = \sqrt{(1-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} = \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{2 - 2\cos(2 \cdot \frac{t}{2})} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos^2(\frac{t}{2}) + \sin^2(\frac{t}{2})} = \sqrt{2}\sqrt{2\sin^2(\frac{t}{2})} = 2|\sin(\frac{t}{2}|$

$L = \int\limits_{-\pi}^{\pi} ||\gamma'(t)||dt = 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin(\frac{t}{2})|dt = 4\int\limits_{0}^{\pi} \sin(\frac{t}{2})dt = 4(-2\cos(\frac{t}{2})|_{t=0}^{t=\pi} = 8$

b) γ ist stetig differenzierbar mit $\gamma'(t) = (-3\cos^2(t)\sin(t), 3\sin^2(t)\cos(t))$. Also ist $\gamma'(t) = 0$ an jeder Stelle, für die $\cos(t) = 0$ oder $\sin(t) = 0$. Die Menge der singulären Punkte von γ ist demnach $\{0, \frac{1}{2\pi}, \frac{3}{2}\pi, 2\pi\}$.

$||\gamma'(t)|| = \sqrt{9\cos^4(t)\sin^2(t) + 9\sin^4(t)\cos^2(t)} = 3\sqrt{\cos^2(t)\sin^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t))} = 3|\cos(t)\sin(t)| = \frac{3}{2}\sin(2t)|$

$L(\gamma) = \int\limits_{0}^{2\pi} ||\gamma'(t)||dt = \frac{3}{2}\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)dt - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2t)dt + \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(2t)dt - \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(2t)dt\right) =$

$= \frac{3}{2}\left(\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin(s)}{2}ds - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(s)}{2}ds + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(s)}{2}ds - \int\limits_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin(s)}{2}ds\right) =$

$= -\frac{3}{4}((-1-1) - (1+1) + (-1-1) - (1+1)) = 6$

3.18 logarithmische Spirale

Als logarithmische Spirale bezeichnet man die Kurve $\gamma_c(t) := (e^{ct}\cos(t), e^{ct}\sin(t)),\ c > 0$.

a) Berechnen Sie die Länge L von γ_c auf $[0, 4\pi]$

b) Parametrisieren Sie $\gamma_c|_{[0,4\pi]}$ nach der Bogenlänge

Lösung:

a)

$$\gamma_c'(t) = e^{ct}(c\ cos(t) - sin(t), c\ sin(t) + cos(t))$$
$$||\gamma_c'(t)||_2^2 = e^{2ct}[c^2cos^2(t) - 2c\ cos(t)sin(t) + sin^2(t) + c^2sin^2(t) - 2csin(t)cos(t) + cos^2(t)] = e^{2ct}[c^2 + 1]$$
$$L(\gamma_c) = \int_0^{4\pi} e^{ct}\sqrt{1+c^2}dt = \sqrt{1+c^2}\frac{e^{4\pi} - e^0}{c} = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}(e^{4\pi c} - 1)$$

b) $l(\tau) :== \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}(e^{\tau c} - 1) = s \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{1}{c}ln\left(1 + \frac{sc}{1+c^2}\right) = t$