Übungen zum Ferienkurs Analysis II

Vektoranalysis und Kurven

3.1 Vektoranalysis

a) Seien $F \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Welche Aussagen sind richtig?

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0, \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{grad}\operatorname{div} F = 0, \quad \operatorname{grad}\operatorname{rot} F = 0.$$

b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2, y^2, -z^2)$. Wie lautet $\nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F$?

3.2 Koordinatentransformation

Sei $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^- \times 0)$ und $\Phi : U \to V$ die Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \xi_1^2 - \xi_2^2 \\ 2\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme $D\Phi(\xi)$, das normierte Zweibein $e_{\xi_1}(\xi), e_{\xi_2}(\xi)$ und $D\Phi^{-1}(\Phi(\xi))$.

(b) Sei $f \in \mathcal{C}\infty(U, \mathbb{R})$ und $\tilde{f} = f \circ \Phi^{-1} : V \to \mathbb{R}$. Drücke den Gradienten von $\tilde{f}$ durch Ableitungen von f in der Basis e_{ξ_1}, e_{ξ_2} aus.

3.3 Krümmung einer Raumkurve

Parametrisieren Sie die Raumkurve $\gamma(t) = \frac{1}{2}\exp(t)(\cos t, \sin t\sqrt{2}), t \in \mathbb{R}$, auf Bogenlänge, bezeichnet mit $\tilde{\gamma}(s)$, und berechnen Sie dafür die Krümmung $\kappa(s)$.

3.4 Kurven

Ein Abschnitt der Kettenlinie ist gegeben durch die Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \cosh x$.

a) Geben Sie eine Parametrisierung $\gamma : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ des Graphen von f als Kurve im $\mathbb{R}^2$ an.

b) Parametrisieren Sie γ auf Bogenlänge.

3.5 Kurvenintegral

Sei $F \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Kraftfeld und $\gamma \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^3), t \to \gamma(t)$, die Bahn eines Teilchens der Masse $m = 1$, welches sich gemäß des 2. Newtonschen Gesetzes $F(\gamma(t)) = m\ddot{\gamma}(t)$ im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ von $\gamma(t_0) = (0, 0, 0)$ nach $\gamma(t_1) = (1, 1, 1)$ bewege und bei $\gamma(t_0)$ die Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ und bei $\gamma(t_1)$ den Geschwindigkeitsbetrag $\|\dot{\gamma}(t_1)\| = 2$ besitze. Berechnen Sie die von F geleistete Arbeit, das heißt das Kurvenintegral von F entlang der Teilchenbahn γ.

3.6 Kurve

Gegeben sei die geschlossene, gegen den Uhrzeigersinn orientiert Kurve

$$\vec{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ -2\sin t \end{pmatrix}, -\pi \leq t < \pi,$$

sowie die Funktion $f := \frac{6x}{\sqrt{4x+4-y^2}}$

(a) Man bestimme die Parameterwerte, für die $\vec{\gamma}(t)$ eine horizontale oder vertikale Tangente besitzt. Ist $\vec{\gamma}(t)$ für $t \in [-\pi, \pi[$ regulär?

(b) Man berechne $\int_{\vec{\gamma}} f ds$.

3.7 Vektorfelder

a) Zeigen Sie für $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dass

$$\nabla \times (fF) = \nabla f \times F + f \nabla \times F.$$

b) Berechnen Sie $\nabla \times G(x)$ für $x \neq 0$ mit $G(x_1, x_2, x_3) = \|x\|^2 \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

3.8 Neilsche Parabel

Parametrisieren Sie die durch die Punktmenge $y^2 - x^3 = 0 \subset \mathbb{R}^2$ gegebene Kurve nach der Bogenlänge.

3.9 Wegintegrale

Berechnen Sie jeweils das Wegintegral $\int_\gamma f(x) \mathrm{d}x$.

(i) $f(x, y) = (e^x, xy)$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$

(ii) $f(x, y) = (\sin(x), x^2 + y^2)$, $\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1) & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$

(iii) $f(x, y, z) = (y, -z, x)$, $\gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t)), 0 \leq t \leq \ln(2)$

(iv) $f(x, y, z) = (2z - \sqrt{x^2 + y^2}, z, z^2)$, $\gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t), 0 \leq t, \leq 2\pi$

3.10 Länge von Kurven

Berechnen Sie die Länge der folgenden Kurven:

(i) $\gamma_1(t) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t))$ mit $0 \leq t \leq 2\pi, a > 0$ fest.

(ii) $\gamma_2(t) = (t^2, t^3)$ mit $0 \leq t \leq 4$.

3.11 Flächeninhalt der Kardioide

Sei $a > 0$ und $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_0^+$ die Parametrisierung der Kardioide in Polarkoordinaten,

$$r(\phi) = a(1 + \cos\ \phi).$$

Berechne den Flächeninhalt der Kardioide.

3.12 Krümmung einer Klothoide

Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(\frac{u^2}{2})du \\ \int_0^t \sin(\frac{u^2}{2})du \end{pmatrix}$$

an der Stelle $t > 0$ gleich ihrer Länge $L(t)$ ist.
Hinweis: Die Krümmungsformel lautet

$$\kappa = \left| \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \right|, \text{ wobei } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

.

Wer noch mehr üben möchte:

3.13 Kreisumfang

Berechnen Sie den Umfang U des Kreises um (0,0) mit Radius r¿0. Betrachten Sie dazu das Kurvenintegral $4\int_k 1ds$, bei dem k der Viertelkreisbogen ist. Wählen Sie eine geeignete Parametrisierung und berechnen Sie das Integral.

3.14 Kurvenintegral über Ellipse

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_k \sqrt{\frac{a^2y^2}{b^2} + \frac{b^2x^2}{a^2}}ds$$

über die Ellipse k

$$x^2a^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Wählen Sie für die Ellipse eine geeignete Parametrisierung.

3.15 Kettenlinie

Ein ideales Seil wird über einen 2km breiten Abgrund gespannt und wird durch die Kurve $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(x) = (x, f(x)$ und $f(x) = \frac{1}{a}(\cosh(ax) - \cosh(a)$ mit $a > 0$ beschrieben (Einheit 1km).

a) Berechnen Sie die Länge des Seils in Abhängigkeit von a.

b) Berechnen Sie die Krümmung des Seils am Scheitel und an den Rändern.

c) Wie stark hängt das Seil in erster Näherung durch, wenn es 1mm, 10cm, bzw. 1m zu lang ist?

3.16 Schraubenlinie

Die Kurve $\gamma(t) := (r\cos(t), r\sin(t), ct)$ mit $c, r > 0$ heißt Schaubenlinie.

a) Parametrisieren Sie γ nach der Bogenlänge. (Verwenden Sie $R^2 = c^2 + r^2$)

b) Berechnen Sie Tangentialeinheitsvektor, Normalenvektro und Krümmung der nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve.

3.17 Kurvenlänge

a) $\gamma(t) := (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ heißt Zykloide. Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma|_{[-\pi,\pi]}$.

b) Finden Sie die singulären Punkte der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) := (\cos^3(t)\sin(t), \sin^3(t))$ und berechnen Sie ihre Bogenlänge.

3.18 logarithmische Spirale

Als logarithmische Spirale bezeichnet man die Kurve $\gamma_c(t) := (e^{ct}\cos(t), e^{ct}\sin(t)),\ c > 0$.

a) Berechnen Sie die Länge L von γ_c auf $[0, 4\pi]$

b) Parametrisieren Sie $\gamma_c|_{[0,4\pi]}$ nach der Bogenlänge