# Übungen zum Ferienkurs Analysis II

## Topologie und Extrema

### 2.1 Eigenschaften von Mengen ⋆

Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen offen, abgeschlossen, zusammenhängend, kompakt sind (ohne Beweis).

- $\mathbb{R}^2$
- $[4, 7)$
- $[0, 1) \cup [2, 5]$
- $\{x \in \mathbb{R} | |x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 + y^3 = 3\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | e^{x^2} = 3e^{-|y|}\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^{10} > 3\}$

**Lösung**

- $\mathbb{R}^2$ (offen, abgeschlossen, zusammenhängend)
- $[4, 7)$ (zusammenhängend)
- $[0, 1) \cup [2, 5]$ (gar nichts)
- $\{x \in \mathbb{R} | |x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (offen)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$ (abgeschlossen, da es sich um das Urbild der Menge $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^2\mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ handelt und die Menge $|0|$ abgeschlossen ist; zusammenhängend; nicht kompakt, da unbeschränkt)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 + y^2 = 3\}$ (abgeschlossen, da es sich um das Urbild der Menge $\{3\}$ unter der stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^2\mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + y^2$ handelt; zusammenhängend; kompakt nach heine-Borel, da offensichtlich beschränkt)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | e^{x^2} = 3e^{-|y|}\}$ (abgeschlossen, da es sich um das Urbild der Menge $\{3\}$ unter der stetigen Abbildung $f : \mathbb{R}^2\mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{x^2+|y|}$ handelt; zusammenhängend; kompakt, da beschränkt $e^{x^2+|y|} = 3 \Leftrightarrow x^2 + |y| = \log 3$)
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^{10} > 3\}$ (offen, zusammenhängend)

### 2.2 Stetigkeit ⋆

Sei $X$, metrischer Raum, zusammenhängend und $f : X \to \mathbb{R}$ lokal konstant d.h. zu jedem $x \in X$ exisitiert eine Umgebung $x \in U \subset X$ so dass $f|_U$ konstant. Zeige: $f$ ist konstant. Geben Sie zudem ein Gegenbeispiel an, für den Fall, dass $X$ nicht zusammenhängend ist (eine lokal konstanten Funktion an, die nicht konstant ist).

**Lösung** Sei $z \in X$ und $A = \{x \in X | f(x) = f(z)\}$. Nach Voraussetzung ist $f$ lokal konstant, also ist $A$ offen. Die Menge $B := X \setminus A = \{x \in X | f(x) \neq f(z)\} = \{x \in X | f(x) < f(z)\} \cup \{x \in X | f(x) > f(z)\}$ ist auch offen und es gilt $X = A \cup B$. Da $X$ nach Voraussetzung zusammenhängend ist, muss gelten $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. Da aber $z \in A \Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow f$ konstant.

Als Gegenbeispiel wählen wir $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Diese Menge ist nicht zusammenhängend. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ ist dann lokal konstant, aber nicht global konstant.

## 2.3 Kompaktheit

Sei $X$ kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen. Zeige: $A$ ist auch kompakt.

**Lösung** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A$. Da $X$ kompakt ist, hat diese eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})$ in $A$. Der Grenzwert dieser Folge liegt wegen der Abgeschlossenheit von $A$ auch in $A$ und daraus folgt, dass $A$ kompakt ist.

## 2.4 Kompaktheit II

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ und $H$ die Menge aller Häufungspunkte der Folge. Weiterhin sei $A := \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup H$ die Menge der Folgenglieder und Häufungspunkte. Zeige: $A$ ist kompakt.

**Lösung** Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat diese eine konvergente Teilfolge in $\mathbb{R}^n$ da sie beschränkt ist. Diese Teilfolge kann entweder konstant sein oder gegen einen der Häufungspunkte der ursprünglichen Folge konvergieren d.h. sie hat also eine konvergente Teilfolge in $H \subset A \to A$ kompakt.

## 2.5 Lokale Extremwerte $\star$

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = y^3 - 3xy + x^2$

(a) Bestimmen Sie die beiden Punkte $(x_0, y_0)$ und $(x_1, y_1)$ mit grad $f(x,y) = 0$.

(b) Wie lautet die Hessematrix von $f$ im Punkt $(x_0, y_0)$ und $(x_1, y_1)$?

(c) Besitzt f in den Punkten $(x_0, y_0)$ und $(x_1, y_1)$ ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt?
Nimmt $f$ ein globales Maximum oder ein globales Minimum in den Punkten $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$?

**Lösung:**

(a) grad $f(x,y) = \begin{pmatrix} -3y + 2x \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$-3y + 2x = 0 \tag{1}$$

$$3y^2 - 3x = 0 \tag{2}$$

Aus 1 und 2 ergeben sich die beiden Punkte $(x_0, y_0) = (0,0)$, $(x_1, y_1) = (\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$.

(b) Die Hesse-Matrix von $f$ lautet: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

(c) Sowohl für Punkt $(x_0,y_0)$ als auch für Punkt $(x_1,y_1)$ sind alle Hauptabschnittsdeterminanten von $H_f$ positiv $\Rightarrow$ die Hesse-Matrix ist positiv definit $\Rightarrow$ $f$ hat in $(x_0,y_0)$ [Sattelpunkt] und $(x_1,y_1)$ lokale Minima.

## 2.6 Globale Minima und Maxima

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

(a) Bestimmen Sie alle stationären Punkt von $f$ und entscheiden Sie, ob diese isolierte Maxima oder Minima sind.

(b) Sei nun $B = [0,2]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie $\sup f(B)$ und $\inf f(B)$.

**Lösung:**

(a) $f$ ist als Polynom beliebig oft differenzierbar. Stationäre Punkt sind Lösungen von

$$0 = \text{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{pmatrix},$$

also $x^2 = y$ und $y^2 = x$. Eingesetzt also $x^4 - x = 0$ mit den reellen Lösungen $x = 0$ und $x = 1$.
Die stationären Punkte sind also
$P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (1,1)$. Die Hessematrix von $f$ ist $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.

Nun ist $H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ mit negativer Determinante -9. $P_1$ ist Sattelpunkt.
$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ hat positive Determinante und Diagonaleinträge, ist somit positiv definit, $P_2$ ist ein lokales isoliertes Minimum von $f$.

(b) $f$ ist stetig auf dem Kompaktum $B$. Maximum und Minimum werden also angenommen.
Kandidaten dafür sind die stationären Punkte im Inneren, also $P_2$, mit $f(P_2) = -1$ und der Rand von $B$.
An den Ecken des Quadrats gilt $F(0,0) = 0, F(2,0) = F(0,2) = 8$ und $F(2,2) = 4$.
Auf den Koordinatenachsen gilt $F(t,0) = F(0,t) = t^3$. Dort gibt es also im Inneren $t \in ]0,2[$ keine weiteren Kandidaten für absolute Maxima und Minima. Auf den anderen beiden Randlinien gilt $g(t) = f(t,2) = f(2,t) = 8 + t^3 - 6t$ mit $t \in [0,2]$.
Kandidaten für Extremwerte sind die Randpunkte $t = 0, t = 2$ und Lösungen von $0 = g'(t) = 3t^2 - 6$, also nur $t = \sqrt{2}$.
Es gilt $f(\sqrt{2},2) = f(2,\sqrt{2}) = 8 - 2\sqrt{2} \in [0,6]$ dies sind also keine Kandidaten für das absolute Maximum oder Minimum.
Denn $F(P_2) = -1$ ist der kleinste gefundene Wert und $F(2,0) = F(0,2) = 8$ ist der größte gefundene Wert. Somit ist $\inf F(B) = -1$ und $\sup F(B) = 8$.

### 2.7 Extrema mit Nebenbedingungen I $\star$

Berechnen Sie diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

die von $(1,1,1)$ den kleinsten bzw. größten Abstand haben.

**Lösung:** Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
$Dg(x,y,z) = \nabla g(x,y,z) = 2(x,y,z) \neq (0,0,0)$,d.h. es genügt die kritischen Punkte der Lagrangeschen Hilfsfunktion zu bestimmen:

$$\nabla f(x,y,z) - \lambda \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zusammen mit der Nebenbedingung liefert dies das Gleichungssystem:

$$1 = (1-\lambda)x \tag{3}$$

$$1 = (1-\lambda)y \tag{4}$$

$$1 = (1-\lambda)z \tag{5}$$

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{6}$$

Aus 3 bis 5 folgt $x = y = z = (1-\lambda)^{-1}$, in 6 eingesetzt ergibt dies $\frac{3}{(1-\lambda)^2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Da die Nebenbedingungsmenge kompakt und $f$ stetig ist, existiert ein Minimum in

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

und ein Maximum in

$$p_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

denn

$$f(p_1) = (1-\sqrt{3})^2 < (1+\sqrt{3})^2 = f(p_2).$$

### 2.8 Extrema mit Nebenbedingungen II

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x,y) = 2xy + \frac{3}{2}x^2$ eingeschränkt auf die Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 5\}$ ihr Maximum im Punkt (2,1) annimmt.

**Lösung:** $K$ ist kompakt und f stetig, also nimmt die Funktion $f$ auf $K$ ihr Maximum an.
$K = g^{-1}(\{0\})$ für $g(x,y) = x^2 + y^2 - 5$. Für $(x,y) \in K$ folgt $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq 0$, 0 ist also regulärer Wert von g.
Nach dem Satz über Extrema mit Nebenbedingungen gilt also: Ist (x,y) ein Extremwert von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass das Gleichungssystem

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

$$g(x,y) = 0$$

erfüllt ist.
Dies bedeutet

$$2y + 3x = 2\lambda x$$
$$2x = 2\lambda y$$
$$x^2 + y^2 = 5$$

Die zweite Gleichung in die erste eingesetzt ergibt $2y = (2\lambda - 3)x = (2\lambda - 3)\lambda y$, bzw.,

$$0 = ((2\lambda - 3)\lambda - 2)y = (2\lambda^2 - 3\lambda - 2)y.$$

1. Fall: $y = 0$. Dann folgt $x = \lambda y = 0$ im Widerspruch zu $g(x, y) = 0$. Keine Lösung.
2. Fall: $2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$, bzw., $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = 2$ oder $= -\frac{1}{2}$.

a) $\lambda = 2, x = 2y$. Aus $0 = g(2y, y) = 5y^2 - 5$ folgt $y = \pm 1$. Also sind $P_{1,2} = \pm(2, 1)$ zwei Kandidaten für das Maximum mit $f(P_{1,2}) = 10$.

b) $\lambda = -\frac{1}{2}, y = -2x$. Aus $0 = g(x, -2x) = 5x^2 - 5$ folgt $x = \pm 1$. Also sind $P_{3,4} = \pm(1, -2)$ zwei weitere Kandidaten für das Maximum mit $f(P_{3,4}) = -\frac{5}{2}$.
Wegen $f(2, 1) \geq f(P_i), i = 1, 2, 3, 4$, folgt, dass $f$ sein absolutes Maximum 10 in (2,1) annimmt.

## 2.9 Extrema mit Nebenbedingungen III

Gegeben sei $f(x, y) : (x - 1)^2 + y^2$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sowie $B := (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4$.

(a) Bestimmen Sie den stationären Punkt von $f(x, y)$ und dessen Art im Inneren von $B$.

(b) Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum von $f$ in ganz $B$ unter Verwendung des Lagrange-Formalismus.

**Lösung:**

(a) Um den stationären Punkt zu finden, müssen wir den Gradienten der Funktion bilden:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (x_0, y_0) = (1, 0).$$

Um die Art des Extremums zu bestimmen, verwenden wir die Hessematrix:

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Hessematrix ist positiv definit, daraus können wir schließen, dass es sich um ein Minimum im Inneren von $B$ handeln muss.

(b) Um das Minimum und Maximum von f in ganz B zu finden, setzen wir folgende Formel an:

$$\nabla f = \lambda \nabla h$$

mit

$$h(x, y) = x^2 + y^2 - 4$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{matrix} 2x \\ 2y \end{matrix}$$

Wir erhalten zusammen mit der Nebenbedingung drei Gleichungen mithilfe deren wir die drei Unbekannten herausfinden können:

$$2x - 2 = 2\lambda x \tag{7}$$

$$2y = 2\lambda y \tag{8}$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{9}$$

**Fallunterscheidung:**
Fall 1: $y = 0$: aus Gleichung (7) bekommen wir die Werte für x: $x = \pm 2$ Daraus resultieren die Werte für $\lambda$ und die zugehörigen Punkte: $x_1 = 2 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow (x_1, y_1) = (2, 0)$ $x_2 = -2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow (x_2, y_2) = (-2, 0)$.

Fall 2: $y \neq 0 \Rightarrow \lambda = -1$
Im zweiten Fall kann kein Wert für x gefunden werden, der Gleichung (7) erfüllt $\Rightarrow$ Widerspruch!

$\Rightarrow$ Da B kompakt ist folgt mit $f(x_1, y_1) = (1, 0)$ das Minimum bei $(x_1, y_1)$ und mit $f(x_2, y_2) = (9, 0)$ das Maximum bei $(x_2, y_2)$.