Übungen zum Ferienkurs Analysis II

Differenzierbarkeit und Taylor-Entwicklung

1.1 Jacobi-Matrix

Man bestimme die Jacobi-Matrix der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(x, y, z) \mapsto 3xy^2 + \exp(x^2z) + 4z^3$.

Lösung

$$\begin{aligned} J_f(x) &= (\nabla f(x))^T \\ &= \begin{pmatrix} 3y^2 + \exp(x^2z)2xz & 6xy & \exp(x^2z)x^2 + 12z^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2 Differenzierbarkeit

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ für $(x, y) \neq 0$ und $f(0, 0) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist und berechnen sie $\partial_1 f(0), \partial_2 f(0)$.

b) Berechnen Sie die Richungsableitung $\partial_v f(0)$ von f im Ursprung in Richtung des Vektors $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, wobei

$$\partial_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \text{ für } a \in \mathbb{R}^2.$$

c) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist.

Lösung:

a) In $(x, y) \neq 0$ ist f stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen. Außerdem ist $|f(x, y)| \leq \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = ||(x, y)||$ also ist f Lipschitz-stetig und damit stetig im Ursprung. Wegen $f(x, 0) = 0$ und $f(0, y) = 0$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $\partial_x f(0) = \partial_y f(0) = 0$.

b) Die Richtungsableitung von f im Ursprung in Richtung v ist

$$\partial_v f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{t^3v_1^2v_2}{tt^2(v_1^2 + v_2^2)} - 0 \right) = f(v).$$

c) f ist total differenzierbar im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, falls eine lineare Abbildung $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ existiert, so dass

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) - f(x_0, y_0) - A(h_1, h_2)}{||(h_1, h_2)||} = 0.$$

Außerdem ist die Matrix A eindeutig bestimmt und gleich der Jacobi-Matrix $Df(x_0, y_0)$ an der Stelle (x_0, y_0). Nach Aufgabenteil a) gilt im Ursprung $(x_0, y_0) = (0, 0)$, dass $Df(0, 0) = (\partial_x f(0, 0), \partial_y f(0, 0)) = (0, 0)$ Wählen wir nun $(h_1, h_2) = (h, h) \neq 0$, so lautet obiger Differenzenquotient im Ursprung

$$\frac{f(h, h) - f(0, 0) - Df(0, 0)(h, h)}{||(h, h)||} = 2^{-\frac{1}{2}} \frac{h}{|h|}.$$

Daraus folgt, dass der Differenzenquotient im Limes $h \to 0$ gegen $\pm 2^{-\frac{1}{2}}$ und nicht gegen 0 strebt, was im Widerspruch steht zur Definition der totalen Differenzierbarkeit.

1.3 Differenzierbarkeit II

Sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}.$$

a) Wie lauten die partiellen Ableitungen $\partial_x f(0,0)$ und $\partial_y f(0,0)$?

b) Wie lautet die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0)$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ im Ursprung?

c) Ist f differenzierbar im Ursprung? Begründen Sie kurz.

d) Zeigen Sie, dass f eine stetige Funktion ist.

Lösung:

a) $\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} = \frac{h^3}{hh^2} = 1$, $\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$.

b) $\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3v_1^3-t^3v_1v_2^2}{t(t^2v_1^2+t^2v_2^2)} = v_1\frac{v_1^2-v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$.

c) Nein, wäre f im Ursprung differenzierbar, so hieße das, dass

$$\partial_{(1,1)}f(0) = f'(0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_x f(0) & \partial_y f(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1.$$

Aber nach (b) ist $\partial_{(1,1)}f(0) = 1\cdot\frac{1-1}{1+1} = 0$. Widerspruch.

d) f ist auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ stetig als Kombination stetiger Funktionen. f ist im Ursprung stetig, denn sie (x_n,y_n) eine Nullfolge in $\mathbb{R}^2$, dann ist

$$|f(x_n,y_n)-f(0,0)| = \frac{|x_n(x_n^2-y_n^2)|}{x_n^2+y_n^2} \leq |x_n|\frac{|x_n^2|+|y_n^2|}{x_n^2+y_n^2} = |x_n| \to 0 = f(0,0) \text{ für } n\to\infty.$$

1.4 Differenzieren

a) Zeigen Sie dass die Abbildung $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto x\cdot||x||$ bei $0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und dass Df(0)=0 gilt.

b) Zeigen Sie, dass für $a,\ b \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung $f:\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^n,\ X \mapsto X\cdot a + b$ an jeder Stelle $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ differenzierbar ist und dass Df(X)=a gilt.

Lösung

a) Um Differenzierbarkeit bei 0 nachzuweisen gilt es zu zeigen, dass es ein linieare Abbildung $L:\mathbb{R}^n$ gibt, so dass gilt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{||f(h)-f(0)-L\cdot h||}{||h||} = 0 \tag{1}$$

Dann ist D(f(0)=L. Setzt man hier L:=0, so folgt.

$$\lim_{h\to 0}\frac{||f(h)-f(0)-L\cdot h||}{||h||} = \lim_{h\to 0}\frac{||f(h)||}{||h||} = \lim_{h\to 0}\frac{||h\cdot||h||\,||}{||h||} = \lim_{h\to 0}||h|| = 0$$

Also ist (1) erfüllt. Aus der Eindeutigkeit von obigem L folgt dann Df(0)=0.

b) Wir berechnen $f(X+H) - f(X) = (X+H) \cdot a + b - (X \cdot a + b) = H \cdot a$
Setzt man in (1) L = a, so folgt

$$\lim_{H \to 0} \frac{||f(X+H) - f(X) - L\,H||}{||H||} = \lim_{H \to 0} 0 = 0 \tag{2}$$

und damit Existenz von Df(X)=a

1.5 Differenzierbarkeit

Untersuchen Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x_1)\sin(x_2)}{x_1^2+x_2^2} & x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$ auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit.

Lösung:

i) Betrachte eine Folge mit $x = x_1 = x_2$ und $x \to 0$.

$$\lim_{(x_1,x_2)\to 0} \frac{\sin(x_1)\sin(x_2)}{x_1^2 + x_2^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \neq 0 \tag{3}$$

Somit ist f bei 0 nicht stetig.

ii) $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\sin(t)\sin(0)}{t^2+0^2} - 0\right) = 0$
Ableitung in x_2 Richtung analog.

iii) Da f bei 0 nicht stetig ist, kann es nicht differenzierbar sein.

1.6 Potenzreihen, Taylorreihen

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \cos\left(2t^2\right) dt.$$

Geben Sie das Taylorpolynom 9. Grades von f im Entwicklungspunkt 0 an. Was ist der Konvergenzradius der Taylorreihe f im Entwicklungspunkt 0?

Lösung Die Taylorreihe des Cosinus lautet

$$\cos s = 1 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{24}s^4 \pm \ldots$$

mit Konvergenzradius ∞. Für den Integranden schreibt man

$$\cos(2t^2) = 1 - \frac{1}{2}(2t^2)^2 + \frac{1}{24}(2t^2)^4 \pm \cdots = 1 - 2t^4 + \frac{2}{3}t^8 \pm \ldots,$$

ebenfalls mit Konvergenzradius ∞. Aufintegriert ergibt sich, wieder mit Konvergenzradius ∞:

$$\int_0^x \cos(2t^2)dt = \int_0^x \left(1 - 2t^4 + \frac{2}{3}t^8 \pm \ldots\right) dt = x - \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{27}x^9 \pm \ldots$$

1.7 Taylor-Formel

Gegeben sei eine Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, die im Ursprung einen kritischen Punkt mit der Hessematrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Weiter gilt

$$g(0) = 2, \quad \partial_1^3 g(0) = \partial_1^2 \partial_2(0) = 1, \quad \partial_1 \partial_2^2 g(0) = \partial^3 g(0) = 0.$$

a) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung bis zur dritten Ordnung von g im Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{R}^2$?

b) Sei nun $f(x, y) = (-y, x + y)$. Wie lautet die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung von $h = g \circ h$ im Entwicklungspunkt 0 explizit?

Lösung:

a) Am stationären Punkt sind die ersten Ableitungen gleich 0. Mit der Taylorformel gilt $g(x, y) = g(0) + \frac{1}{2}\partial_1^2 g(0)x^2 + \partial_1\partial_2 g(0)xy + \frac{1}{2}\partial_2^2 g(0)y^2 + \frac{1}{6}\partial_1^3 g(0)x^3 + \frac{1}{2}\partial_1^2\partial_2 g(0)x^2 y + \frac{1}{2}\partial_1\partial_2^2 g(0)xy^2 + \frac{1}{6}\partial_2^3 g(0)y^3 = 2 + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y$.

b) $h(x, y) = g(f(x, y)) = g(-y, x + y) = 2 + \frac{1}{2}y^2 - y(x + y)$.

1.8 Taylor und Extrema

Sei $f \in C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit einem stationären Punkt bei $(0, \frac{\pi}{2})$ und $\partial_1^2 f(0, \frac{\pi}{2}) = 1$, $\partial_1\partial_2 f(0, \frac{\pi}{2}) = \partial_2^2 f(0, \frac{\pi}{2}) = -1$.

a) Der Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ ist für f ein lokales Maximum, Sattelpunkt oder lokales Minimum?

b) Sei nun $h(\varphi) = f(\varphi \cos\varphi, \varphi \sin\varphi)$. Wie lautet die Taylorentwicklung von h im Punkt $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis zur zweiten Ordnung?

c) $\frac{\pi}{2}$ ist für h ein lokales Maximum, Sattelpunkt oder lokales Minimum.

Lösung:

a) Im stationären Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ ist die Hessematrix von f, $H_f(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ hyperbolisch, da die Determinante $= -2 < 0$ ist.

b) Mit der Kettenregel ist

$$h'(\frac{\pi}{2}) = (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\partial_x f + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\partial_y f,$$

wobei f und seine partiellen Ableitungen immer bei $(\varphi\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)$ ausgewertet werden. Somit ist $h'(\frac{\pi}{2}) = 0$, da $h(\frac{\pi}{2}) = f(0, \frac{\pi}{2})$, also der stationäre Punkt von f mit verschwindendem Gradienten. Weiter ist

$$\begin{aligned} h''(\varphi) &= (-\sin\varphi - \sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\partial_x f + (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2 \partial_x\partial_x f \\ &\quad + 2(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\partial_y\partial_x f + (2\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\partial_y f + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)^2 \partial_y\partial_y f. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} h''(\varphi) &= 0 + (-\frac{\pi}{2})^2 \partial_x\partial_x f + 2(-\frac{\pi}{2})\partial_y\partial_x f + 0 + 1^2 \partial_y\partial_y f \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \pi - 1. \end{aligned}$$

c) Da offenbar $h''(\frac{\pi}{2}) > 0$ besitzt h dort ein lokales Minimum.

1.9 Taylorpolynom

Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \exp(x-y)$ an der Stelle (0,0).

Lösung: $\nabla f(x,y) = e^{x-y}(1,-1)^T \qquad Hf(x,y) = e^{x-y}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
Das 2.Taylorpolynom von f an der Stelle (0,0) ist dann gegeben durch

$$T_2((x,y);(0,0)) = f(0,0) + \nabla f(0,0)^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}(x,y) \cdot Hf(0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= 1 + x - y + \tfrac{1}{2}(x,y) \cdot \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \end{pmatrix} = 1 + (x-y) + \tfrac{1}{2}(x-y)^2$$

1.10 Taylorreihe

Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \cos x + y(y+2)$ und sei (x_0, y_0) einer der kritischen Punkte. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f um den Entwicklungspunkt $(\pi, -1)$

Lösung: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ 2y+2 \end{pmatrix} \qquad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$T(f,(x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x-x_0) + \tfrac{1}{2}(x-x_0)^T Hf(x_0)(x-x_0) =$$
$$= -2 + 0 + \tfrac{1}{2}(x-\pi, y+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\pi \\ y+1 \end{pmatrix} = -2 + \tfrac{1}{2}((x-\pi)^2 + 2(y+1)^2)$$

1.11 Taylorpolynom

Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung der Funktion

$$f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{1}{1+x^3}$$

zum Entwicklungspunkt 0.

Lösung: Für $x \in]-1;1[$ gilt (Geometrische Reihe)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^3)^n = 1 - x^3 + x^6 - x^9 \pm ... \tag{4}$$

Dies ist insbesondere die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt 0. Das gesuchte Taylorpolynom dritter Ordnung lautet demnach $T_3(x,f) = 1 - x^3$.

1.12 Existenz einer Funktion

Gibt es eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, sodass $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt?

Lösung: Nein, denn nach dem Satz von Schwarz müsste für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y \cdot \cos(xy) = x \cdot \cos(xy) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{5}$$

Dies ist aber für x=1 und y=0 falsch.