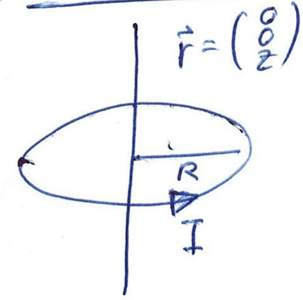
Aufgabe 1



a) Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$\vec{j}\, d^3r' = I d\vec{r}'$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint d\vec{r} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad ; \; \vec{r} = z \cdot \hat{e}_z$$

Parametrisierung d. Schleife

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} R\cos\varphi' \\ R\sin\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \quad d\vec{r}' = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi' \\ R\cos\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi' = R\, \hat{e}_{\varphi'}\, d\varphi'$$

$$\vec{r}-\vec{r}' = z \cdot \hat{e}_z - R \cdot \hat{e}_{\rho'} \quad ; \quad |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{R^2+z^2}$$

$$d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}') = (R \cdot z \cdot \hat{e}_{\rho'} + R^2 \hat{e}_{z'})d\varphi' = \begin{pmatrix} Rz\cos\varphi' \\ Rz\sin\varphi' \\ R^2 \end{pmatrix} d\varphi$$

$$B(\vec{r} = z \cdot \hat{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi'}_{2\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}^3} \cancel{R} [R \cdot z \cdot \underbrace{\hat{e}_{\rho'}}_{\text{verschwindet bei } \int_0^{2\pi} d\varphi} + R^2 \hat{e}_z]$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2\sqrt{R^2+z^2}^3} \cdot \hat{e}_z$$

Alternativ

$\vec{j}(\vec{r}') = I\, \delta(\rho'-R)\, \delta(z)\, \hat{e}_{\varphi'}$

$\vec{r}' = \rho' \hat{e}_\rho + z' \hat{e}_{z'}$

b) Magnetisches Moment

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \, \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') = \frac{I}{2} \oint \vec{r}' \times d\vec{r}' = I \cdot \overset{R^2\pi}{\overset{\shortparallel}{F}} \cdot \underset{\hat{e}_z}{\underset{\shortparallel}{\vec{n}}}$$

(Rechte Hand-Regel)

$$= I \cdot \pi R^2 \hat{e}_z$$

$$\vec{B}_{Dipol} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\vec{r} \cdot (\vec{m} \cdot \vec{r})}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3} \right) \quad \text{mit } \vec{r} = z \cdot \hat{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I\pi R^2 \hat{e}_z \left(\frac{3z^2}{|z|^5} - \frac{1}{|z|^3} \right) = \frac{\mu_0 I R^2}{2|z|^3} \cdot \hat{e}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2\sqrt{z^2}^3} \hat{e}_z$$

Für große Entfernungen: $\sqrt{R^2+z^2}^3 \propto \sqrt{z^2}^3$

$$\Rightarrow \cancel{\vec{B}(\vec{r})} = \underbrace{\frac{\mu_0 I R^2}{2\sqrt{z^2}^{3/2}} \hat{e}_z}_{\text{Dipolfeld}} + \sigma\left(\frac{1}{|z|^5}\right)$$

$\vec{B}(z=\hat{e}_z)$

c) Für sehr große Abstände kann das Magnetfeld der lokalisierten Stromverteilung durch das Dipolfeld angegeben werden mit $\vec{r} = (x,y,0)$

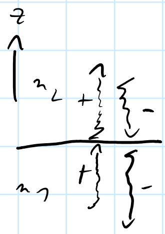
Das in der Formel

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3}\right) \quad ; \quad \vec{r}\cdot\vec{m} = 0, \text{ da } \hat{e}_{x,y} \perp \hat{e}_z$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m}}{\sqrt{x^2+y^2}^3} = -\frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{4\sqrt{x^2+y^2}^3} \hat{e}_z$$

Aufgabe2

Mittwoch, 23. März 2016 22:18



a) $\vec{E}_2(z,t) = E_2^+ \vec{e}_x \, e^{i(k_2 z - \omega t)} + E_2^- \vec{e}_x \, e^{i(-k_2 z - \omega t)}$

$\vec{E}_1(z,t) = E_1^+ \vec{e}_x \, e^{i(k_1 z - \omega t)} + E_1^- \vec{e}_x \, e^{i(-k_1 z - \omega t)}$

Dispersionsrelation:

$\frac{k_2}{\omega} = \frac{n_2}{c} \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$, durch annahme $\mu_2 = 1$

Alle Wellen treffen senkrecht auf, und es gilt je einen einlaufenden und einen auslaufenden Anteil (- für neg. z-Richtung, + für pos. z-Richtung) $\vec{E}$ sowie $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ sind tangential zur Grenzfläche.

aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes $(\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0})$ folgt (an der stelle $z=0$)

$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^- \quad \mathrm{I}$

des weiteren gilt

$H_2 = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_2 = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{k}_2 \times \vec{E}_2 = \pm \frac{n_2}{\mu_0 c} \vec{e}_z \times \vec{E}_2$

Betrachte Stetigkeit der Tangentialkomponente von $\vec{H}$ an $z=0$

$(\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{0})$.

$\Rightarrow n_1 E_1^+ - n_1 E_1^- = n_2 E_2^+ - n_2 E_2^- \quad \mathrm{II}$

Auflösen d. Gleichungen nach E_1^+ und E_1^-

$\mathrm{I} \cdot n_1 + \mathrm{II}: \; 2 n_1 E_1^+ = E_2^+ (n_1 + n_2) + E_2^- (n_1 - n_2)$

$\mathrm{I} \cdot n_1 - \mathrm{II}: \; 2 n_1 E_1^- = E_2^+ (n_1 - n_2) + E_2^- (n_1 + n_2)$

$$\Rightarrow E_1^+ = \underbrace{\frac{n_1+n_2}{2n_1}}_{:=\alpha_{12}} E_2^+ + \underbrace{\frac{n_1-n_2}{2n_1}}_{:=\beta_{12}^*} E_2^-$$

$$E_1^- = \underbrace{\frac{n_1-n_2}{2n_1}}_{\beta_{12}} E_2^+ + \underbrace{\frac{n_1+n_2}{2n_1}}_{\alpha_{12}^*} E_2^-$$

Damit erhält man,

$$\begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12}^* \\ \beta_{12} & \alpha_{12}^* \end{pmatrix} \begin{matrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{matrix}$$

Teil II a : $E_2^- = 0 \quad \Rightarrow E_1^- = \beta_{12} E_2^+ \qquad E_1^- = \alpha_{12} E_2^+$

Poynting-Vektor. Aus Angabe: $\langle \vec S \rangle = \frac{1}{2\mu_0\mu} |\vec B_0|^2 \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \hat k$ mit $\underbrace{|\vec B_0|^2 = \frac{c^2}{(n)^2} |E_0|^2}_{\text{aus VL}}$

$n = \sqrt{\mu\varepsilon} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

$n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$

$$\Rightarrow \langle S_2 \rangle = |\langle \vec S_2 \rangle| = \underbrace{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} |E_2|^2 \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}}_{\text{siehe VL}} = \frac{1}{2\mu_0} |E_2|^2 n_2$$

Man erhält:

$$\frac{\text{reflektiert}}{\text{einfallend}} := \frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{\beta_{12}}{\alpha_{12}} = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$$

$$\frac{\text{transmittiert}}{\text{einfallend}} := \frac{E_2^+}{E_1^+} = \frac{1}{\alpha_{12}} = \frac{2n_1}{n_1+n_2}$$

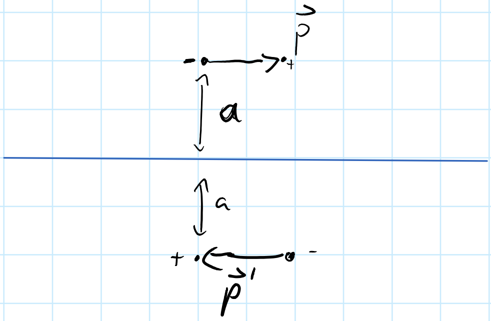
Reflexionsvermögen :

$$R = \frac{\langle S_1^- \rangle}{\langle S_1^+ \rangle} = \frac{|E_1^-|^2 n_1}{|E_1^+|^2 n_1} = \frac{\beta_{12}^2}{\alpha_{12}^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

$$T = \frac{\langle S_2^+ \rangle}{\langle S_1^+ \rangle} = \frac{|E_2^+|^2 n_2}{|E_1^+|^2 n_1} = \frac{n_2}{n_1 |\alpha_{12}|^2} = \frac{n_2 4 n_1^2}{n_1 (n_1 + n_2)^2}$$

$$R + T = \frac{(n_1 - n_2)^2 + 4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{(n_1 + n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = 1$$

Spiegeldipol:



$\vec{p}\,' = -\vec{p}$

$\vec{a}\,' = -\vec{a}$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} - \frac{\vec{p}(\vec{r}+\vec{a})}{|\vec{r}+\vec{a}|^3}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{px}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}^{\,3}} - \frac{px}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}^{\,3}}\right)$$

Test d. Randbedingung:

$$\phi(\vec{r})\Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{px}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}} - \frac{px}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}\right) = 0 \;\checkmark$$

l) Berechnung d. Influenzierten Flächenladungsdichte. !.! Das Minus kürzt hier doch nicht

$$\sigma(x,y) = \varepsilon_0\,\vec{n}\cdot\vec{E}\Big|_{z=0} = \varepsilon_0\,\vec{e}_z\cdot\left(-\vec{\nabla}\phi\right)\Big|_{z=0} = -\varepsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{z=0}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-3px\left(x^2+y^2+(z-a)^2\right)\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\cdot 2(z-a)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}^{\,6}} + \frac{3px\left(x^2+y^2+(z+a)^2\right)\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\cdot 2(z+a)}{\sqrt{x^2+z^2+(z+a)^2}^{\,6}}\right)$$

$$= \frac{-3px}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z-a}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}^{\,5}} + \frac{z+a}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}^{\,5}}\right)$$

$$= -\frac{3pxa}{\dots}$$

$$\sigma(x,y) = -\frac{3pxa}{2\pi\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$$

c Dipol-Dipol-Wechselwirkung zur Kraftberechnung

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3} - 3\,\frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot\vec{p}_1\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot\vec{p}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^5}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-p^2}{8a^3}\right)$$

da $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

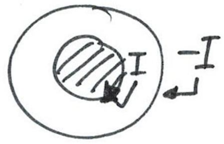
$\vec{r}_1 = -\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$

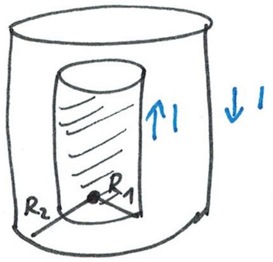
$\vec{F} = -\vec{\nabla} W_{12}$ $\qquad \vec{F} \propto \vec{e}_z$

$$\vec{F} = -\frac{d}{d(2a)} W_{12}\,\vec{e}_z = -\frac{3p^2}{64\pi\varepsilon_0 a^4}\,\vec{e}_z$$

Hier nach 2a ableiten!!!!

Aufgabe 4 Koaxialkabel





a) Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) = \left[\frac{I}{\pi R_1^2}\,\Theta(R_1-\rho) - \frac{I}{2\pi R_2}\,\delta(\rho-R_2)\right]\hat{e}_z$$

Kontrolle

$$\int_{\text{Querschnitt}} d\vec{F}\cdot\vec{j} = \int \rho\, d\rho \int d\varphi\, \vec{j} = \frac{I}{\pi R_1^2}\cdot 2\pi\cdot\frac{R_1^2}{2} - \frac{I}{2\pi R}\cdot 2\pi R = 0$$

b) Vektorpotential

Symmetriebetrachtung: $\vec{j}(\vec{r}) = j(\rho)\,\hat{e}_z \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = A(\rho)\,\hat{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = -\frac{\partial A}{\partial \rho}\,\hat{e}_\varphi = B(\rho)\,\hat{e}_\varphi$$

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \quad \text{(Feldgleichung)}$$

$$\rightsquigarrow -\mu_0 j(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cdot\frac{\partial A(\rho)}{\partial\rho}\right) \quad \text{(für diese Symmetrie)}$$

Region ② $\boxed{R_1<\rho<R_2}$ und ③ $\boxed{\rho>R_2}$: $j(\rho)=0$

$$\Rightarrow 0 = d\left(\rho\,\frac{\partial A(\rho)}{\partial\rho}\right) \Rightarrow \overset{\text{const}}{\overset{\shortparallel}{a}} = \rho\cdot\frac{dA}{d\rho} \Rightarrow dA = \frac{a}{\rho}\,d\rho$$

$$\rightsquigarrow A(\rho) = a\cdot\ln\rho + \overset{\text{const.}}{\overset{\shortparallel}{b}} = a\ln\left(\frac{\rho}{C_1}\right) + C_2$$

Region ① $\boxed{\rho<R_1}$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dA}{d\rho}\right) = -\frac{\mu_0 I}{R_1^2\pi} \Rightarrow d\left(\rho\frac{dA}{d\rho}\right) = -\frac{\mu_0 I}{R_1^2\pi}\,d\rho\cdot\rho$$

$$\rho\frac{dA}{d\rho} = C_3 - \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}\rho^2 \Rightarrow dA = \left[\frac{C_3}{\rho} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}\rho\right]d\rho$$

$$\Rightarrow A(\rho) = C_3\cdot\ln\left(\frac{\rho}{C_4}\right) + C_5 - \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2}\rho^2$$

$$A(\varrho) = \begin{cases} c_3 \ln\left(\frac{\varrho}{c_4}\right) + c_5 - \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2}\varrho^2 & , \varrho < R_1 \\ a_2 \ln\left(\frac{\varrho}{c_{21}}\right) + c_{22} & , R_1 < \varrho < R_2 \\ a_3 \ln\left(\frac{\varrho}{c_{31}}\right) + c_{32} & , \varrho > R_2 \end{cases}$$

Konstanten bestimmen:

$c_3 = 0$, da $A(0)$ endlich, $c_5 = 0$ (Wahl)

Stetigkeit von $A(\varrho)$: bzw. stetige Differenzierbarkeit ($\varrho \neq R_2$)

$\boxed{\varrho = R_1}$ $$-\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2} \cdot R_1^2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} = a_2 \cdot \ln\left(\frac{R_1}{c_{21}}\right) + c_{22}$$

$$-\frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \cdot R_1 = \frac{a_2}{R_1} \Rightarrow a_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

Damit $$-\frac{\mu_0 I}{4\pi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R_1}{c_{21}}\right) + c_{22}$$

$$\rightarrow c_{21} = R_1 \quad , \quad c_{22} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

$\boxed{\varrho = R_2}$ $$-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{\mu_0 I}{4\pi} = a_3 \ln\left(\frac{R_2}{c_{31}}\right) + c_{32}$$

$$\rightarrow c_{32} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

$a_3 = 0$

Begründung: Da bei $\varrho > R_2$, $I_{\text{eing}} = 0 \overset{\text{Ampere}}{\Rightarrow} B(\varrho) = 0$

$\Rightarrow A(\varrho) = 0$ für $\varrho > R_2 \Rightarrow a_3 = 0$

$$\Rightarrow A(\varrho) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{cases} \varrho^2/R_1^2 & , \varrho < R_2 \\ 1 + 2\ln(\varrho/R_1) & , R_1 < \varrho < R_2 \\ 1 + 2\ln(R_2/R_1) & , \varrho > R_1 \end{cases}$$

ALTERNATIV Ampère'sches Gesetz

$$\oint_{\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 2\pi\rho\, B(\rho) = \mu_0 \cdot I_{eng} = \mu_0 I \begin{cases} \pi\rho^2/\pi R_1^2 & , \rho < R_1 \\ 1 & , R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & , \rho > R_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{cases} \rho/R_1^2 & , \rho < R_1 \\ 1/\rho & , R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & , \rho > R_2 \end{cases}$$

$$-\frac{dA(\rho)}{d\rho} = B(\rho) \Rightarrow -B(\rho)\,d\rho = dA(\rho) \quad \Big| \int \ldots$$

$$A(\rho) = \underbrace{A_0}_{=0\ (\text{Wahl})} - \int_0^{\rho} d\rho'\, B(\rho') = \ldots$$

$\boxed{\rho > R_2}$

$$A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \int_0^{R_1} d\rho' \frac{\rho'}{R_1^2} + \int_{R_1}^{R_2} d\rho' \frac{1}{\rho} \right\}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[1 + 2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \right]$$

$\boxed{R_1 < \rho < R_2}$

$$A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \int_0^{R_1} d\rho' \frac{\rho'}{R_1^2} + \int_{R_1}^{\rho} d\rho' \frac{1}{\rho} \right\}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[1 + 2 \ln(\rho/R_1) \right]$$

$\boxed{\rho < R_1}$

$$A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \int_0^{\rho} d\rho' \frac{\rho'}{R_1^2} \right\} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho^2}{R_1^2}$$

Tipp: In dieser Reihenfolge ausrechnen.

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \hat{e}_z \left(-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right) \begin{cases} \rho^2/R_1^2 & , \rho < R_1 \\ 1 + 2\ln(\rho/R_1) & , R_1 < \rho < R_2 \\ 1 + 2\ln(R_2/R_1) & , \rho > R_2 \end{cases}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \hat{e}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{cases} \rho/R_1^2 & , \rho < R_1 \\ 1/\rho & , R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & , \rho > R_2 \end{cases}$$

c) Selbstinduktivität pro Längeneinheit

$$L = \frac{1}{4I^2}\int d^3r\, \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\ell}{I^2}\underbrace{\int dF}_{\text{Querschnitt}}\, \vec{j}(\vec{r}_\perp)\cdot\vec{A}(\vec{r}_\perp)$$

$$\Rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{1}{I^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}\int_0^{\infty} d\rho \cdot \rho \;\; \vec{j}(\vec{r}_\perp)\cdot\vec{A}(\vec{r}_\perp)$$

$$= \frac{2\pi}{I^2}\cdot\left(-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right)\int_0^{\infty} d\rho\cdot\rho\left[\frac{I}{R_1^2\pi}\Theta(R_1-\rho)\cdot\frac{\rho^2}{R_1^2} - \frac{I}{2\pi R_2}\delta(\rho-R_2)\left(1+2\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\right]$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\underbrace{\int_0^{R_1} d\rho\, \rho^3}_{=R_1^4/4}\cdot\frac{1}{R_1^4} - \underbrace{R_2\cdot\frac{1}{2R_2}}_{\frac{1}{2}}\left(1+2\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{4}\right]$$

$$\vec{j}(\vec{r}_\perp) = \left[\frac{I}{\pi R_1^2}\Theta(R_1-\rho) - \frac{I}{2\pi R_2}\delta(\rho-R_2)\right]\hat{e}_z$$

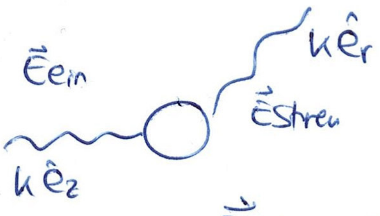
(Erinnerung)

$$\vec{A}(\vec{r}_\perp) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{e}_z\begin{cases} \rho^2/R_1^2 & ; \rho < R_2 \\ 1+2\ln(\rho/R_1) & ; R_1<\rho<R_2 \\ 1+2\ln(R_2/R_1) & ; \rho > R_1 \end{cases}$$

Hinweis:

Hier dürfen wir nicht $\Phi = \int d\vec{F}\cdot\vec{B} = L\cdot I$ verwenden, da wir das Koaxialkabel nicht über Leiterschleifen darstellen können.

Aufgabe 5



$$\vec{E}_{ein} = \vec{E}_0 \, e^{i(kz-\omega t)}$$
$$= E_0 \cdot \vec{\mathcal{E}}_0 \, e^{i(kz-\omega t)}$$
$$\vec{B}_{ein} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_{ein} = \frac{1}{c} \hat{e}_z \times \vec{E}_{ein}$$

$$\vec{E}_{streu} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r} e^{i(k\hat{r}-\omega t)} (\hat{e}_r \times \vec{p}) \times \hat{e}_r \quad ; \quad \vec{p} = \alpha \vec{E}_0 = \alpha \cdot E_0 \cdot \vec{\mathcal{E}}_0$$

a) $$B_{streu} = \frac{1}{\omega} \vec{k}_{streu} \times \vec{E}_{streu} = \frac{1}{c} \hat{e}_r \times \vec{E}_{streu}$$

b) $$\left.\frac{d\sigma_{\vec{\mathcal{E}}}}{d\Omega}\right|_{pol} = \frac{r^2 |\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{E}_{streu}|^2}{|\vec{\mathcal{E}}_0^* \cdot \vec{E}_{ein}|^2} = \frac{r^2 |\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{E}_{streu}|^2}{E_0^2}$$

$$= \frac{\mu_0^2 \omega^4 \alpha^2}{16\pi^2} |\vec{\mathcal{E}}^* \cdot [(\hat{e}_r \times \vec{\mathcal{E}}_0) \times \hat{e}_r]|^2$$

<u>Vektorprodukt</u>

$$(\hat{e}_r \times \vec{\mathcal{E}}_0) \times \hat{e}_r = \mathcal{E}_0 \underbrace{(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r)}_{=1} - \hat{e}_r (\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \hat{e}_r)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\sigma_{\vec{\mathcal{E}}}}{d\Omega}\right|_{pol} = \frac{\mu_0^2 \omega^4 \alpha^2}{16\pi^2} |\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot [\vec{\mathcal{E}}^* - \hat{e}_r \underbrace{(\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \hat{e}_r)}_{=0}]|^2$$

$=0$, da $\vec{\mathcal{E}}^*, \vec{\mathcal{E}} \perp k\hat{e}_r$
Polarisation $\perp$ auf Ausbreitung

$\omega = ck$

$$= \frac{\mu_0^2 c^4 k^4 \alpha^2}{16\pi^2} |\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \vec{\mathcal{E}}^*|^2$$

c) <u>Mittelung</u>

$$\left.\frac{d\sigma_{\vec{\mathcal{E}}}}{d\Omega}\right|_{unpol} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{\mathcal{E}}_0 = \hat{e}_x, \hat{e}_y} \left.\frac{d\sigma_{\mathcal{E}}}{d\Omega}\right|_{pol}$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0^2 c^4 k^4}{\cancel{16\pi^2}\, 32\pi^2} \alpha^2}_{\equiv \beta} |\vec{\mathcal{E}}^* \times \hat{e}_z|^2$$

(I) Polarisation am Ende $\quad \vec{\epsilon}_\perp = \dfrac{\hat{e}_r \times \hat{e}_z}{\sin\theta}$

$$\frac{d\sigma_\perp}{d\Omega} = \frac{\beta}{\sin^2\theta} \cdot |(\hat{e}_r \times \hat{e}_z) \times \hat{e}_z|^2 = \frac{\beta}{\sin^2\theta} |\hat{e}_z \underbrace{(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z)}_{=\cos\theta} - \hat{e}_r \underbrace{(\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z)}_{=1}|^2$$

$$= \frac{\beta}{\sin^2\theta} \underbrace{\left|\begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2}_{\sin^2\theta} = \beta$$

(II) Polarisation am Ende $\quad \vec{\epsilon}_\parallel = \dfrac{\hat{e}_z - \cos\theta\, \hat{e}_r}{\sin\theta}$

$$\frac{d\sigma_\parallel}{d\Omega} = \frac{\beta}{\sin^2\theta} | \hat{e}_z \times \hat{e}_z - (\hat{e}_r \times \hat{e}_z) \cos\theta|^2$$

$$= \frac{\beta}{\sin^2\theta} \cos^2\theta\, |\hat{e}_z \times \hat{e}_r|^2 = \frac{\beta}{\sin^2\theta} \cos^2\theta \underbrace{\left[\overset{=1}{|\hat{e}_z|^2} \overset{=1}{|\hat{e}_r|^2} - \overset{=\cos\theta}{|\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r|^2} \right]}_{=\sin^2\theta}$$

$$= \beta \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_\perp}{d\Omega} + \frac{d\sigma_\parallel}{d\Omega} = \beta(1+\cos^2\theta) = \frac{\mu_0^2 c^4 k^4 \alpha^2}{32\pi^2}(1+\cos^2\theta)$$

Anmerkung: Beispiel Diel. Kugel: $\alpha = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right) \cdot R^3$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 R^6 \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$$

vgl. (6.31) aus Vorlesung.