Ferienkurs zur Theoretischen Physik II

21. März - 24. März 2016

Philipp Landgraf, Franz Zimma

Probeklausur

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Gesamt:
Punkte:	10	11	11	12	14	58
Erreicht:						

Hinweise:

- Es sind **keine Hilfsmittel** erlaubt.
- Lesen Sie sich alle Aufgaben aufmerksam durch.
- Geben Sie immer einen Lösungsweg an.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Aufgabe 1: Magnetfeld einer stromdurchflossene Leiterschleife .... (10 Punkte)

In der xy-Ebene liegt um den Ursprung zentriert eine kreisförmige Leiterschleife mit dem Radius R. Durch diese fließt im Gegenuhrzeigersinn der konstante Strom I.

(a) (4 Punkte) Berechnen Sie (**ohne** Verwendung von Symmetrieargumenten) das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ auf der z-Achse, d.h. für die Punkte $\vec{r} = (0, 0, z)$.
Hinweis: Für eine gegebene Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ ergibt das Biot-Savart-Gesetz folgendes Magnetfeld:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' \, \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}.$$

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie das magnetische Dipolmoment $\vec{m}$ und das zugehörige Dipolfeld auf der z-Achse. Verifizieren Sie für große Entfernungen auf der z-Achse die Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus (a).
Hinweis: Das magnetische Feld $\vec{B}$ eines magnetischen Dipols am Ursprung hat die Form:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\vec{r} \cdot (\vec{m} \cdot \vec{r})}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3} \right)$$

(c) (2 Punkte) Welchen Wert hat das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ an den Punkten $\vec{r} = (x, y, 0)$ in der xy-Ebene mit sehr großem Abstand vom Ursprung?

Aufgabe 2: Reflexion und Brechung .... (11 Punkte)

Gegeben sei die Grenzfläche $z = 0$ zwischen zwei dielektrischen Medien ($j = 1, 2$) mit den Brechungsindizes $n_j = \sqrt{\varepsilon_j}$. In beiden Medien gibt es ebene elektromagnetische Wellen

$$\vec{E}_j(z, t) = \left(E_j^+ \mathrm{e}^{i(k_j z - \omega t)} + E_j^- \mathrm{e}^{i(-k_j z - \omega t)} \right) \hat{e}_x$$

mit vorwärts und rückwärts laufenden Komponenten, die senkrecht auf die Grenzfläche treffen.

(a) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass die Stetigkeitsbedingungen für die transversalen Felder auf folgenden linearen Zusammenhang zwischen den komplexen Feldamplituden führen

$$\begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie die Koeffizienten α und β in Abhängigkeit der Brechungsindizes n_1, n_2.

Betrachten Sie nun die Brechung und Reflexion einer in Medium 1 in positive z-Richtung laufenden, auf die Grenzfläche treffenden Welle (es gilt somit $E_2^- = 0$).

(a) (2 Punkte) Drücken Sie den zeitlichen Mittelwert $\langle S_j^\pm \rangle$ der Energiestromdichte (in Richtung $\pm\hat{e}_z$) durch die elektrische Feldamplitude $E_j^\pm$ aus.
Hinweis: Der gemittelte Poynting Vektor $\langle \vec{S} \rangle$ kann mit der Feldenergiedichte $w_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2\mu_0\mu}|\vec{B}_0|^2$ verknüpft werden via:

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle w_{\mathrm{em}} \rangle \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\vec{k}}{|k|}$$

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie das Reflexionsvermögen $R = \langle S_1^- \rangle / \langle S_1^+ \rangle$ und das Transmissionsvermögen $T = \langle S_2^+ \rangle / \langle S_1^+ \rangle$ jeweils als Funktion von n_1, n_2 und zeigen Sie, dass $R + T = 1$ gilt.

Aufgabe 3: Spiegeldipol .... (11 Punkte)

Ein in x-Richtung zeigender, elektrischer Dipol $\vec{p} = (p, 0, 0)$ befindet sich am Punkt $\vec{a} = (0, 0, a)$ (mit $a > 0$) über einer in der xy-Ebene liegenden, geerdeten (unendlich ausgedehnten) Metallplatte.

(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie unter Verwendung der Methode der Spiegelladungen das Potential $\Phi(\vec{r})$ im oberen Halbraum $z > 0$ zu der Randbedingung, dass es auf der Metallplatte ($z = 0$) verschwindet. Überprüfen Sie diese Randbedingung explizit.
Hinweis: Das Potential eines elektrischen Dipols $\vec{p}$ am Ursprung lautet:

$$\Phi_{\text{Dipol}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^3}.$$

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie die auf der Metallplatte influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie ausgehend vom Dipol-Dipol-Wechselwirkungspotential die Kraft $\vec{F} \sim \vec{e}_z$, die der Spiegeldipol $\vec{p}$ am Spiegelpunkt $\vec{a}\,'$ auf den Dipol $\vec{p}$ am Punkt $\vec{a}$ ausübt.
Hinweis: Das Wechselwirkungspotential zweier elektrischer Dipole $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ in der Relativposition $\vec{r}$ hat folgende Form:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{r}|^3} - \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{|\vec{r}|^5} \right)$$

Aufgabe 4: Koaxialkabel .... (12 Punkte)

Ein (sehr langes) gerades Koaxialkabel besteht aus einem inneren, leitenden Vollzylinder mit Radius R_1 und konzentrisch dazu einem leitenden Zylindermantel mit Radius $R_2 > R_1$ und vernachlässigbarer Dicke, welcher als Rückleitung dient. Die Zylinderachse liegt auf der z-Achse.

(a) (3 Punkte) Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) \sim \vec{e}_z$ im Koaxialkabel an, wenn der hin- und rückfließende Strom I jeweils gleichmäßig über den Leiterquerschnitt verteilt ist.

(b) (6 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige (stetige) Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = A(\rho)\vec{e}_z$ im ganzen Raum.
Hinweis: Da die Funktion $A(\rho)$ nur vom Radius ρ abhängt, gilt für den Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten:

$$\triangle A(\rho) = A''(\rho) + \frac{1}{\rho} A'(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left[\rho A'(\rho)\right]$$

(c) (3 Punkte) Berechnen Sie die Selbstinduktivität pro Längeneinheit L/ℓ des Koaxialkabels.
Hinweis: Die Definition der Selbstinduktivität ist:

$$L = \frac{1}{I^2} \int \mathrm{d}^3 r\, \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}).$$

Aufgabe 5: Streuung an einem elektrischen Dipol .... (14 Punkte)

In großer Entfernung von einem Streukörper mit induziertem elektrischen Dipolmoment $\vec{p}$ hat das gestreute Strahlungsfeld die Form:

$$\vec{E}_{\text{streu}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r} \mathrm{e}^{i(kr - \omega t)} \left(\hat{e}_r \times \vec{p}\right) \times \hat{e}_r.$$

Für einen Streukörper mit der elektrischen Polarisierbarkeit α gilt die Beziehung $\vec{p} = \alpha \vec{E}_0$, wobei $\vec{E}_0$ der elektrische Amplitudenvektor der in z-Richtung laufenden ebenen elektromagnetischen Welle $(\vec{E}_{\text{ein}}, \vec{B}_{\text{ein}})$ ist.

(a) (1 Punkt) Welche Form hat das magnetische Streufeld $\vec{B}_{\text{streu}}(\vec{r}, t)$?

(b) (5 Punkte) Geben Sie den allgemeinen Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt $\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{pol}}$ in Abhängigkeit von den Polarisationen $\vec{\epsilon}_0$ und $\vec{\epsilon}$ der einfallenden und gestreuten Strahlung an und vereinfachen Sie diesen Ausdruck für das gegebene Problem.

(c) (8 Punkte) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ für die Streuung *unpolarisiert* einfallender Strahlung.
Hinweis: Die richtungsabhängige Größe ist über die Polarisationsvektoren

$$\vec{\epsilon}_{\parallel} = \frac{\hat{e}_z - \cos\theta \hat{e}_r}{\sin\theta} \qquad \text{mit} \qquad \vec{\epsilon}_{\perp} = \frac{\hat{e}_r \times \hat{e}_z}{\sin\theta}$$

der gestreuten Strahlung zu summieren.