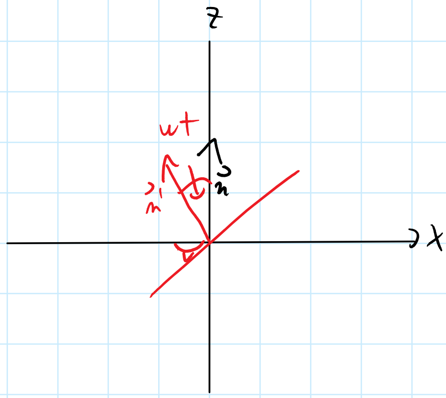
Aufgabe 3.1

Mittwoch, 23. März 2016 15:05

a Flächennormale: rotiert um x Achse. $\vec{n} \perp \vec{v}$

i)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \qquad |\vec{n}| = 1 \checkmark$$



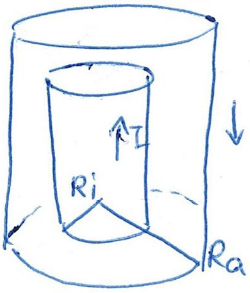
ii) $\vec{B} = B_0 \, \vec{e}_z$

$$U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F d\vec{F} \cdot \vec{B}$$

$$= -B_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_F d\vec{F} \cdot \vec{e}_z}_{\text{= Kreisfläche mit } \vec{n} \text{ s.o}} = -B_0 \frac{\partial}{\partial t} R^2 \pi \cos(\omega t)$$

$$= B_0 R^2 \pi \sin(\omega t)$$

b) (i) Hohlrohrleiter



Aus Symmetrie folgt wieder

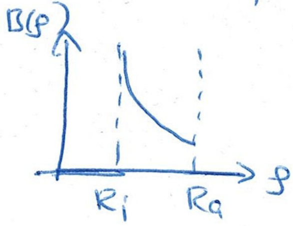
$$\vec{j}(\vec{r}) = \left[\frac{\delta(\rho - R_i)}{2\pi R_i} - \frac{\delta(\rho - R_a)}{2\pi R_a}\right] I \cdot \hat{e}_z$$

$$= j(\rho) \cdot \hat{e}_z \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = A(\rho) \cdot \hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\hat{e}_\varphi = -\frac{dA(\rho)}{d\rho} \cdot \hat{e}_\varphi = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Ampere: $\oint\limits_{\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 I_{eing} = \mu_0 \begin{cases} 0 & ; \rho < R_i \\ I & ; R_i < \rho < R_a \\ 0 & ; \rho > R_a \end{cases}$

$$\Rightarrow B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \Theta(\rho - R_i)\,\Theta(R_a - \rho)$$



Selbstinduktivität pro l

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{I^2} \int\limits_{\text{Querschnitt}} dF \; \vec{j}(\vec{r}_\perp) \cdot \vec{A}(\vec{r}_\perp)$$

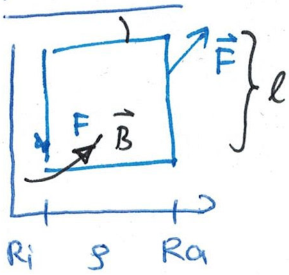
Für diese Betrachtung reicht die Kenntnis von $A(\rho)$ für $R_i < \rho < R_a$

$$\rightarrow A(\rho) = -\int_{R_i}^{\rho} d\rho' \, B(\rho') = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho' \Big|_{R_i}^{\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R_i}{\rho}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{L}{l} = \frac{1}{I^2} \int_{R_i}^{R_a} d\rho \, \rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \cdot \left[\frac{\delta(\rho - R_i)}{2\pi R_i} - \frac{\delta(\rho - R_a)}{2\pi R_a}\right] \cdot I \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R_i}{\rho}\right)$$

$$= \mu_0 \cdot \left[\frac{R_i}{2\pi R_i} \underbrace{\ln\left(\frac{R_i}{R_i}\right)}_{=0} - \frac{R_a}{2\pi R_a} \ln\left(\frac{R_i}{R_a}\right)\right] = \underline{\underline{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}}$$

Alternativ:



$$\Phi = \iint d\vec{F} \cdot \vec{B} = L \cdot I \quad , \quad d\vec{F} = dz \, d\rho \, \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{B} = B(\rho) \cdot \hat{e}_\varphi$$

$$= \int_0^l dz \int_{R_i}^{R_a} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right) \cdot l$$

Bemerkung: $\Phi = L \cdot I$ gilt nur für Leiterschleifen. Die Situation hier können wir allerdings als Überlagerung solcher Leiterschleifen auffassen.

b) ii) Selbstinduktivität pro Längeneinheit

$$L = \frac{1}{I^2}\int d^3r \; \vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\ell}{I^2}\underbrace{\int dF}_{\text{Querschnitt}} \; \vec{j}(\vec{r}_\perp)\cdot\vec{A}(\vec{r}_\perp)$$

$$\Rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{1}{I^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}\int_0^{\infty} d\rho \cdot \rho \quad \vec{j}(\vec{r}_\perp)\cdot\vec{A}(\vec{r}_\perp)$$

$$= \frac{2\pi}{I^2}\cdot\left(-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right)\int_0^{\infty} d\rho\cdot\rho\left[\frac{I}{R_1^2\pi}\,\Theta(R_1-\rho)\cdot\frac{\rho^2}{R_1^2} - \frac{I}{2\pi R_2}\,\delta(\rho-R_2)\left(1+2\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\right]$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\underbrace{\int_0^{R_1} d\rho\, \rho^3}_{=R_1^4/4}\cdot\frac{1}{R_1^4} - \underbrace{R_2\cdot\frac{1}{2R_2}}_{\frac{1}{2}}\left(1+2\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\right\}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{4}\right]$$

$$\vec{j}(\vec{r}_\perp) = \left[\frac{I}{\pi R_1^2}\,\Theta(R_1-\rho) - \frac{I}{2\pi R_2}\,\delta(\rho-R_2)\right]\hat{e}_z$$

(Erinnerung)

$$\vec{A}(\vec{r}_\perp) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\hat{e}_z\begin{cases}\rho^2/R_1^2 & ; \; \rho<R_2 \\ 1+2\ln(\rho/R_1) & ; \; R_1<\rho<R_2 \\ 1+2\ln(R_2/R_1) & ; \; \rho>R_1\end{cases}$$

Hinweis:

Hier dürfen wir nicht $\Phi = \int d\vec{F}\cdot\vec{B} = L\cdot I$ verwenden, da wir das Koaxialkabel nicht über Leiterschleifen darstellen können.

c) $\vec{j}(\vec{r},t) = \underbrace{I_0\,\delta(\rho-R)\,\delta(z)\,\cos(\omega t)\,\hat{e}_\varphi}_{=\vec{j}_0(\vec{r})}$

(i) <u>Retardiertes Skalarpotential</u> $\Phi^{ret}(\vec{r},t) = 0$, da $\rho(\vec{r}) = 0$

<u>Retardiertes Vektorpotential</u>

$$\vec{A}^{ret}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r},t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}_0(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\cos(\omega t-k|\vec{r}-\vec{r}'|)$$

<u>Fernfeld:</u> <u>Taylor</u> $(1+x)^n \approx 1+nx$, $x \ll 1$

- $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$ (siehe VL)
- $k|\vec{r}-\vec{r}'| = kr\left(1-2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}+\mathcal{O}\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)\right)^{1/2} = kr\left[1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}+\mathcal{O}\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)\right]$
- $\cos(\omega t-k|\vec{r}-\vec{r}'|) = \cos\left(\omega t-kr+k\cdot\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)$
  $\approx \cos(\omega t-kr) - k\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}\sin(\omega t-kr) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$

wobei $\cos x = \cos x_0 + \frac{d}{dx}\cos x\big|_{x=x_0}(x-x_0) + \mathcal{O}(x-x_0)^2$

$= \cos x_0 - \sin(x_0)(x-x_0) + \mathcal{O}(1/r)$

mit $x = \omega t-kr+k\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}$ und $x_0 = \omega t-kr$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\cos(\omega t-kr)\overbrace{\int d^3r'\,\vec{j}_0(\vec{r}')}^{=0,\text{ da } \vec{j}_0\propto\hat{e}_\varphi}$$

$$-\frac{\mu_0 k}{4\pi r^2}\sin(\omega t-kr)\underbrace{\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r})\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r}')}_{=\vec{I}_2}$$

$\vec{I}_2 = \int d^3r'\,(\vec{r}\cdot\vec{r}')\,\vec{j}_0(\vec{r}')$, $x' = R\cos\varphi'$, $y' = R\sin\varphi'$

$\vec{r}\cdot\vec{r}' = xR\cos\varphi' + yR\sin\varphi'$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}dz'\int_0^{\infty}d\rho'\,\rho'\int_0^{2\pi}d\varphi'\cdot I_0\cdot\delta(\rho-R)\,\delta(z)\cdot(xR\cos\varphi'+yR\sin\varphi')\begin{pmatrix}-\sin\varphi'\\ \cos\varphi'\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= I_0\cdot R^2\pi\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix} = m(-y,x,0)$$

Mit $k=\omega/c$ ~~und~~, $m = I_0 \cdot R^2\pi$ und $\hat{e}_\varphi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) = \underbrace{-\frac{\mu_0 \omega m}{4\pi r c}\sin(\omega t - kr)\sin\theta}_{A_\varphi}\cdot\hat{e}_\varphi \qquad = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

ii) $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$= \underbrace{\hat{e}_r \underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}}_{\mathcal{O}(\frac{1}{r})}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta)}_{\mathcal{O}(\frac{1}{r})}}_{\mathcal{O}(\frac{1}{r^2})} - \hat{e}_\theta\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)$$

$$= -\hat{e}_\theta\left(\underbrace{\frac{1}{r}A_\varphi}_{\mathcal{O}(\frac{1}{r^2})} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r},t) = -\hat{e}_\theta\frac{\partial}{\partial r}A_\varphi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\approx -\frac{\mu_0\omega^2 m}{4\pi r c^2}\cos(kr-\omega t)\sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

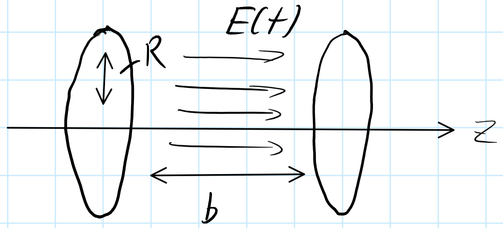
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \operatorname{grad}\Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$= \frac{\mu_0\omega^2 m}{4\pi r c}\cos(kr-\omega t)\sin\theta\,\hat{e}_\varphi$$

$$= c\vec{B}\times\hat{e}_r \quad \text{da} \quad \hat{e}_\varphi = -\hat{e}_\theta\times\hat{e}_r = \hat{e}_r\times\hat{e}_\theta$$

Aufgabe 3.2

Mittwoch, 23. März 2016 11:42



$$\vec{E} = E(t)\,\hat{e}_z$$

$$\frac{dE}{dt} = K = \text{const.}$$

a Benutze folgende Maxwellgleichung

$$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 K \vec{e}_z$$

Randeffekte dürfen vernachlässigt werden, weshalb folgt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\,\vec{e}_\varphi$$

Nun gibt es 2 Mgl. das B-Feld zu Berechnen:

1. Mgl: Ampere'sches Durchflutungsgesetz

$$\oint_{C=\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \iint_F dF \cdot \text{rot}\,\vec{B}$$

wähle C : $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho$ $d\vec{r} = \rho \vec{e}_\varphi$ $\varphi = [0, 2\pi]$

wir verwenden hier Zylinderkoordinaten, d.h. $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Damit:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho\, B(\rho)\, \underbrace{\vec{e}_\varphi \cdot e_\varphi}_{1} = 2\pi \rho B(\rho)$$

$$\overset{\text{Ampere s.o.}}{=} \int_0^{\rho} d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho'\, \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_{1}\, \mu_0 \varepsilon_0 K = \mu_0 \varepsilon_0 K\, 2\pi \frac{\rho^2}{2}$$

0

$$\Rightarrow B(\rho) = \mu_0 \varepsilon_0 K \frac{\rho}{2}$$

Möglichkeit 2:
Benutze die Rotation in Zylinderkoordinaten.

$$\text{rot}\,\vec{B} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho}\right]\vec{e}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\varphi) - \frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_z$$

da $\vec{B}$ nur von ρ abhängt,
und aus $\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$, da keine freien Ströme vorhanden sind.

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho\, B(\rho)]\,\vec{e}_z \overset{!}{=} \mu_0 \varepsilon_0 \vec{K} e_z$$

$$\Rightarrow \rho\, B(\rho) = \int d\rho\, \mu_0 \varepsilon_0 K \rho = \mu_0 \varepsilon_0 K \frac{\rho^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow B(\rho) = \mu_0 \varepsilon_0 K \frac{\rho}{2}.$$

C muss 0 sein, dass $B(0)$ endlich ist

b. Berechnung des Poynting-Vektors.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} E(t)\, \mu_0 \varepsilon_0 K \frac{\rho}{2} \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi}_{=-e_\rho}$$

beachte Rechtshändigkeit des Kreuzproduktes.

verwende: $E(t) = Kt$ $\quad\Rightarrow \vec{S} = \frac{\varepsilon_0}{2} K^2 \rho t \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{=-e_\rho}$

c

(i) Berechnung des Energieflusses im Kondensator.

$$J = \oiint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{S}$$

wobei der Normalenvektor der Mantelfläche $\vec{n} = -\vec{e}_\rho$ ist. Die Deckelflächen tragen nicht bei, da deren Normalenvektor $\vec{n} \parallel \vec{e}_z$ ist, und $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho = 0$.

$$\Rightarrow J = \frac{\varepsilon_0}{2} K^2 R t \underbrace{\iint dF}_{\text{Mantelfläche} := 2\pi R l}$$

$$\Rightarrow J = \pi \varepsilon_0 K^2 R^2 l t$$

(ii) Berechnen sie die im Kondensator gespeicherte Feldenergie

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\text{Zylinder}} d^3r \, w_{em} = \int_{\text{Zylinder}} d^3r \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{r},t) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r},t) \right]$$

$\vec{B}(\vec{r},t)$ ist zeitlich konstant

$$\Rightarrow \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \, \rho \left[\frac{\varepsilon_0}{2} K^2 t^2 + \varepsilon_0 \frac{K^2 \rho^2 \mu_0}{8} \right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \pi l R^2 K^2 t^2 + \frac{\varepsilon_0^2 \mu_0}{16} \pi K^2 R^4 l = \frac{\varepsilon_0}{2} \pi l R^2 K^2 \left(t^2 + \frac{R^2}{8c^2} \right)$$

Test ob gilt $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = J$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \varepsilon_0 \pi l R^2 K^2 t = J \checkmark$$

d) Aus der Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E}(\vec{r},t) = 0$$

folgt mit $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(t)\cdot\hat{e}_z$:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r},t) = 0$$ damit:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) \propto t$$

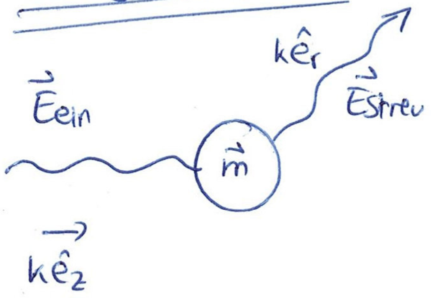
<u>Alternativ</u> $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(t)\,\hat{e}_z$ ist wirbelfrei

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (\text{da } \vec{j} = \vec{0})$$

wäre $\vec{E}(t)$ nicht $\propto t$, $\Rightarrow \vec{B}$ zeitabhängig

Damit Widerspruch zu $\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = 0$

Aufgabe 3.3



$$\vec{E}_{ein} = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} = E_0 \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\vec{B}_{ein} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_{ein} = \frac{1}{c} \hat{e}_z \times \vec{E}_{ein} = \vec{B}_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

Streufelder:

$$\vec{E}_{streu} = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r c} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} (\vec{m} \times \hat{e}_r)$$

$$\vec{B}_{streu} = \frac{1}{c} \hat{e}_r \times \vec{E}_{streu}$$

$$\vec{m} = \beta \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \frac{\beta}{\mu_0 c} (\hat{e}_z \times \vec{E}_0) e^{i(kz-\omega t)}$$

a) $$\vec{E}_{streu} = \beta \frac{\omega^2}{4\pi r c^2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t + kz - \omega t)} \cdot (\hat{e}_z \times \vec{E}_0) \times \hat{e}_r$$

$$\left.\frac{d\sigma_{\vec{\mathcal{E}}}}{d\Omega}\right|_{pol} = \frac{r^2 |\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{E}_{streu}|^2}{|\vec{\mathcal{E}}_0^* \cdot \vec{E}_{ein}|^2} = \frac{r^2 |\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \vec{E}_{streu}|^2}{E_0^2}$$

$$= \underbrace{\beta^2 \frac{\omega^4}{16\pi^2 c^4}}_{\equiv \alpha} |\vec{\mathcal{E}}^* \cdot [(\hat{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}_0) \times \hat{e}_r]|^2$$

b) Vektorprodukte auflösen

$$(\hat{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}_0) \times \hat{e}_r = \vec{\mathcal{E}}_0 \cdot (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r) - \hat{e}_z (\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \hat{e}_r)$$

$$\rightarrow \vec{\mathcal{E}}^* \cdot [(\hat{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}_0) \times \hat{e}_r] = (\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \vec{\mathcal{E}}^*) \underbrace{\cos\theta}_{\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r} - (\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \hat{e}_r)(\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \hat{e}_z)$$

$$= \vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \underbrace{[\vec{\mathcal{E}}^* (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r) - \hat{e}_r (\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \hat{e}_z)]}_{\equiv \vec{v}}$$

$$\left.\frac{d\sigma_{\vec{\mathcal{E}}}}{d\Omega}\right|_{unpol} = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{E}_0 = \hat{e}_x, \hat{e}_y} \left.\frac{d\sigma_{\vec{\mathcal{E}}}}{d\Omega}\right|_{pol} \overset{\text{siehe VL}}{=} \frac{\alpha}{2} |\vec{v} \times \hat{e}_z|^2$$

- $\vec{v} \times \hat{e}_z = (\vec{\mathcal{E}}^* \times \hat{e}_z) \cos\theta - (\hat{e}_r \times \hat{e}_z) \cdot (\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \hat{e}_z)$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_{\vec{\mathcal{E}}}}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2} |(\vec{\mathcal{E}} \times \hat{e}_z)\cos\theta - (\hat{e}_r \times \hat{e}_z)(\vec{\mathcal{E}}^* \cdot \hat{e}_z)|^2$$

$\perp$ polarisiert am Ende

$$\vec{\epsilon}_\perp = \frac{\hat{e}_r \times \hat{e}_z}{\sin\theta}$$

$$\frac{d\sigma_\perp}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2} \left| [(\hat{e}_r \times \hat{e}_z) \times \hat{e}_z] \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - (\hat{e}_r \times \hat{e}_z) \cdot \frac{\overbrace{(\hat{e}_r \times \hat{e}_z) \cdot \hat{e}_z}^{=0,\ \text{da } (\hat{e}_r \times \hat{e}_z) \perp e_z}}{\sin\theta} \right|^2$$

$$= \frac{\alpha}{2} \left| \left(\hat{e}_z \underbrace{(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z)}_{\cos\theta} - \hat{e}_r \underbrace{(\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z)}_{=1}\right) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right|^2$$

$$= \frac{\alpha}{2} \left| \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right|^2 = \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\theta$$

$\parallel$ polarisiert am Ende

$$\vec{\epsilon}_\parallel = \frac{\hat{e}_z - \cos\theta\, \hat{e}_r}{\sin\theta}$$

$$\frac{d\sigma_\parallel}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2} \left| \underbrace{(\hat{e}_z \times \hat{e}_z)}_{=\vec{0}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - (\hat{e}_r \times \hat{e}_z) \cdot \underbrace{(\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z)}_{=1} \cdot \frac{1}{\sin\theta} - (\hat{e}_r \times \hat{e}_z) \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + (\hat{e}_r \times \hat{e}_z)(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z) \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \right|^2$$

$$= \frac{\alpha}{2\sin^2\theta} |\hat{e}_r \times \hat{e}_z|^2 = \frac{\alpha}{2\sin^2\theta} [\underbrace{1}_{|\hat{e}_r|^2 \cdot |\hat{e}_z|^2} - \underbrace{\cos^2\theta}_{|\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z|^2}] = \frac{1}{2} \cdot \alpha$$

Gesamter Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_\perp}{d\Omega} + \frac{d\sigma_\parallel}{d\Omega} = \frac{\alpha}{2} \cdot (\cos^2\theta + 1)$$

$$= \beta^2 \frac{\omega^4}{32\pi^2 c^4} (1 + \cos^2\theta) \qquad \frac{\omega}{k} = c$$

$$= \beta^2 \frac{k^4}{32\pi^2} (1 + \cos^2\theta)$$