Ferienkurs zur Theoretischen Physik II

21. März - 24. März 2016

Philipp Landgraf, Franz Zimma

Übungsblatt 3

Elektrodynamik, Elektromagnetische Strahlung

Aufgabe 3.1: Gemischte Elektrodynamik

(a) Ein leitender Kreisring ($x^2 + y^2 = R^2, z = 0$) rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die x-Achse. Es wirkt das homogene Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$.

i. Geben Sie die (rotierende) Flächennormale $\vec{n}(t)$ an.

ii. Berechnen Sie die Spannung U_{ind}, die im Ring induziert wird.

(b) Berechnen Sie die Selbstinduktivität pro Längeneinheit $\frac{L}{\ell}$ von folgenden (unendlich langen und zylindersymmetrischen) Objekten.

i. Ein Hohlrohrleiter bestehend aus zwei (unendlich dünnen) Zylindermänteln mit Innenradius R_i und Außenradius $R_a > R_i$, bei dem der Strom I auf dem inneren Mantel hin- und auf dem äußeren Mantel zurückfließt.

ii. Ein Koaxialkabel, bestehend aus einem inneren, leitenden Vollzylinder vom Radius R_i und konzentrisch dazu einem leitendem Zylindermantel mit Radius R_a, bei dem der Strom I auf dem Vollzylinder hin- und auf dem Mantel zurückfließt.

(c) Eine kreisförmigen Leiterschleife (Radius R) befinde sich in der xy-Ebene. Ein hochfrequenter Wechselstrom $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0 \cos(\omega t)$ mit $\vec{j}_0 = I_0 \delta(\rho - R)\delta(z)\hat{e}_\varphi$ erzeugt M1-Strahlung. Die Ladungsdichte kann als verschwindend angenommen werden.

i. Berechnen Sie das retardierte Skalarpotential $\Phi(\vec{r}, t)$ sowie Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ in Fernfeldnäherung.
Zur Kontrolle:
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu\omega m}{4\pi rc} \sin(\omega t - kr) \sin\theta \hat{e}_\varphi,$$
wobei $m = |\vec{m}|$ das (statische) magnetische Dipolmoment der Leiterschleife ist.

ii. Berechnen Sie hieraus $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ in Fernfeldnäherung.
Hinweis: Sie können die Rotation in Zylinderkoordinaten verwenden:
$$\text{rot } \vec{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} \right] \hat{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \hat{e}_\theta + \\ + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \right] \hat{e}_\varphi .$$

Aufgabe 3.2: Aufladen eines Plattenkondensators

Ein Plattenkondensator bestehend aus zwei parallelen kreisförmigen Platten vom Radius R wird beginnend bei $t = 0$ aufgeladen. Das zeitabhängige elektrische Feld zwischen den Platten hat die Form $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(t)\hat{e}_z$ mit $E(t) = Kt$ für $t \geq 0$.

(a) Berechnen Sie das durch den Verschiebungsstrom induzierte Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ im Kondensator als Funktion des Abstandes ρ von der Symmetrieachse. Gehen Sie davon aus, dass das Magnetfeld (wie bei einem stromdurchflossen Leiter) nur eine azimuthale Komponente hat: $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\hat{e}_\varphi$.

(b) Berechnen Sie den Poynting Vektor $\vec{S} = \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)/\mu_0$.

(c) Berechnen Sie den gesamten Energiefluss J in den Kondensator hinein sowie die im Kondensator gespeicherte Feldenergie
$$\mathcal{E}_{\text{em}}(t) = \int \mathrm{d}V \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^{\,2} + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^{\,2} \right).$$
Zeigen Sie, dass
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{em}}(t)}{\mathrm{d}t} = J$$
gilt.

(d) Zeigen Sie, dass die lineare Zeitabhängigkeit $E(t) = Kt$ für ein Aufladefeld der Form $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(t)\hat{e}_z$ als einzige mit den gekoppelten Maxwellgleichungen konsistent ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Wellengleichung für $\vec{E}$.

Aufgabe 3.3: Streuung an einem magnetischen Dipol ....

In großer Entfernung von einem Streukörper mit induziertem magnetischem Dipolmoment $\vec{m}$ hat das gestreute Strahlungsfeld die Form:

$$\vec{E}_{\text{streu}}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r c} \mathrm{e}^{i(kr-\omega t)} \left(\vec{m} \times \hat{e}_r\right).$$

Für einen Streukörper mit der magnetischer Polarisierbarkeit β gilt die Beziehung $\vec{m} = \beta \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$, wobei $\vec{B}_0$ der magnetische Amplitudenvektor der in z-Richtung laufenden ebenen elektromagnetischen Welle $(\vec{E}_{\text{ein}}, \vec{B}_{\text{ein}})$ ist.

(a) Geben Sie den allgemeinen Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt $\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{pol}}$ in Abhängigkeit von den Polarisationen $\vec{\epsilon}_0$ und $\vec{\epsilon}$ der einfallenden und gestreuten Strahlung an und vereinfachen Sie diesen Ausdruck für das gegebene Problem.

(b) Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ für die Streuung *unpolarisiert* einfallender Strahlung.
Hinweis: Die richtungsabhängige Größe ist über die Polarisationsvektoren

$$\vec{\epsilon}_{\parallel} = \frac{\hat{e}_z - \cos\theta \hat{e}_r}{\sin\theta} \qquad \text{mit} \qquad \vec{\epsilon}_{\perp} = \frac{\hat{e}_r \times \hat{e}_z}{\sin\theta}$$

der gestreuten Strahlung zu summieren.