# Aufgabe 21

a) (i) $\vec{j}(\vec{r}) = \varrho \cdot \vec{v} = \varrho \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{Q}{R^2\pi} \Theta(R-\varrho)\,\delta(z) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{e}_z$

$\Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot \hat{e}_z \times [\varrho \cdot \hat{e}_\varrho + z \cdot \hat{e}_z]$

$= \varrho \cdot \omega \cdot \hat{e}_\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j}(\vec{r}) = \frac{Q\omega}{R^2\pi}\, \varrho\, \Theta(R-\varrho)\, \delta(z) \cdot \hat{e}_\varphi}$$

$\hat{e}_\varrho \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z$
$\hat{e}_z \times \hat{e}_\varrho = \hat{e}_\varphi$
$\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z = \hat{e}_\varrho$

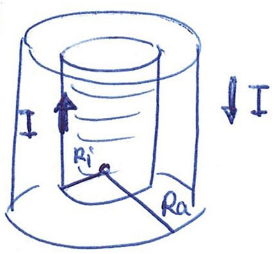
(ii) $\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r'\, \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \varrho\, d\varrho' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' \, [\varrho' \cdot \hat{e}_{\varrho'} + z' \hat{e}_{z'}] \times \hat{e}_{\varphi'} \cdot \frac{Q\omega}{R^2\pi} \cdot \varrho'\, \Theta(R-\varrho')\, \delta(z')$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{R} \varrho^3\, d\varrho'}_{R^4/4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi'}_{2\pi} \underbrace{[\hat{e}_{\varrho'} \times \hat{e}_{\varphi'}]}_{\hat{e}_{z'}} \cdot \frac{Q\omega}{R^2\pi}$$

$$= \underline{\frac{Q\omega R^2}{4} \cdot \hat{e}_z}$$

b)




(i) $$\vec{j}(\vec{r}) = \left[\frac{I}{\pi R_i^2}\,\Theta(R_i-\rho) - \frac{I}{2\pi R_a}\,\delta(\rho-R_a)\right]\hat{e}_z$$

Kurze Kontrolle

$$\int_{\text{Querschnitt}} d\vec{F}\cdot\vec{j} = \int d\rho\,\rho \int d\varphi\;\hat{e}_z\cdot\vec{j}$$

$$= \frac{I}{\pi R_i^2}\,\pi R_i^2 - \frac{I}{2\pi R_a}\cdot 2\pi R_a = 0$$

(ii) Symmetriebetrachtung

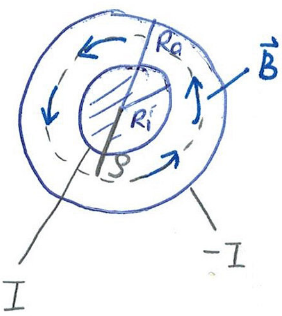
$$\vec{j}(\vec{r}) = j(\rho)\,\hat{e}_z \;\Rightarrow\; \vec{A}(\vec{r}) = A(\rho)\cdot\hat{e}_z$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\partial A(\rho)}{\partial\rho}\,\hat{e}_\varphi = B(\rho)\cdot\hat{e}_\varphi$$

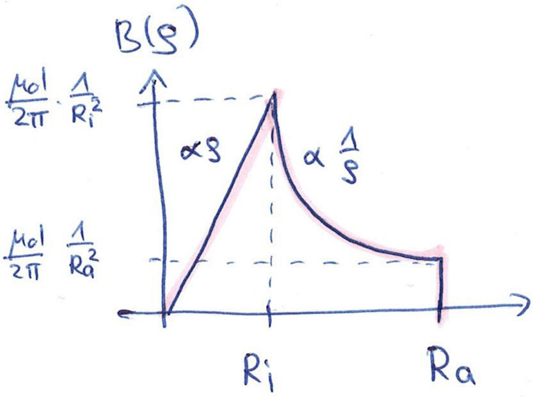
Ampere:

$$\oint_{\partial F} d\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = 2\pi\rho\,B(\rho) = \mu_0\iint_F d\vec{F}\cdot\vec{j}(\vec{r}) = \mu_0\cdot I_{eing}$$

$$\Rightarrow B(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi\rho}\begin{cases} I\cdot\frac{\pi\rho^2}{\pi R_i^2}, & \rho < r \\ I, & R_i<\rho<R_a \\ 0, & \rho > R_a \end{cases}$$




$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\begin{cases} \rho/R_i^2, & \rho < R_i \\ 1/\rho, & R_i<\rho<R_a \\ 0, & \rho > R_a \end{cases}$$



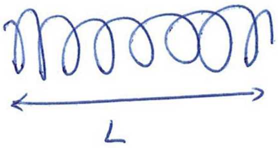

Anmerkung:

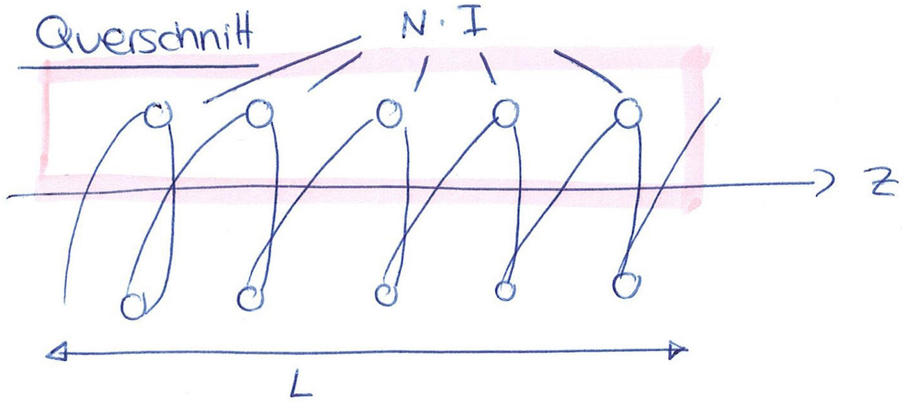
$$A(\rho) = -\int_0^\rho d\rho\,B(\rho) \quad + A_0$$

liefert folgendes Vektorpotential

$$A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\begin{cases} \rho^2/R_i^2, & \rho < R_i \\ 1+2\ln(\rho/R_i), & R_i<\rho<R_a \\ 1+2\ln(R_a/R_i), & \rho>R_a \end{cases}$$

c)



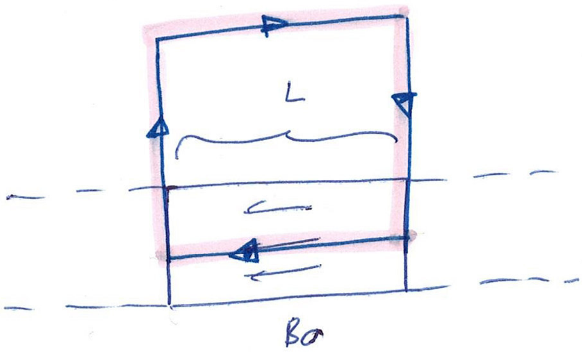




(i) $\vec{j}(\vec{r}) = \frac{N \cdot I}{L} \, \Theta\left(\frac{L}{2} - |z|\right) \delta(R-\varrho) \, \hat{e}_\varphi$

(ii) Annahme $\quad \vec{B}(\vec{r}) = B_0 \cdot \Theta(R-\varrho) \cdot \hat{e}_z \quad (*)$

Physikalisch gesehen betrachten wir hier eine unendlich lange Spule mit konstantem $N/L$-Verhältnis. Bei der endlichen Spule ist dies $(*)$ nicht der Fall, da sich die Feldlinien nicht schließen würden.

Betrachten wir das Ampere'sche Gesetz mit dieser Annahme:

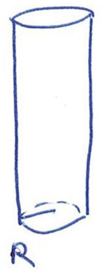



$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = B_0 \cdot L = \mu_0 I_{eing} = \mu_0 \cdot N \cdot I$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} d\vec{r} \cdot B_0 \cdot \hat{e}_z \, \Theta(R-\varrho)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} dz \, B_z(z) = \mu_0 \cdot N \cdot I$$

d)




(i) $\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{R^2 \pi} \Theta(R-\rho) \cdot \hat{e}_z$

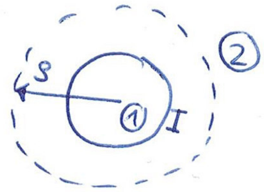
(ii) Symmetriebetrachtung

$\vec{j}(\vec{r}) = j(\rho)\ \hat{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{A}(\vec{r}) = A(\rho) \cdot \hat{e}_z$

$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho} \hat{e}_\varphi = B(\rho) \cdot \hat{e}_\varphi$

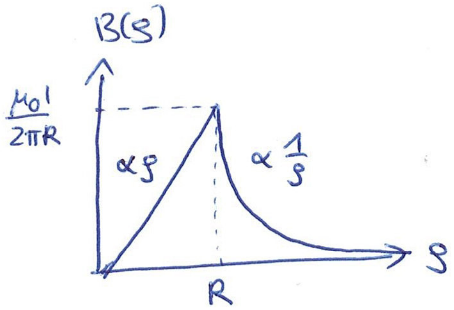
Ampere: $\int d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 2\pi\rho\, B(\rho) = \mu_0 I_{eing}$

$B(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_{eing}}{\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \begin{cases} \rho^2/R^2, & \rho < R \\ 1, & \rho > R \end{cases}$




Bereich 1 $\boxed{\rho < R}$

$B^{(1)}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\rho}{R^2}$




Bereich 2 $\boxed{\rho > R}$

$B^{(2)}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho}$

Vektorpotential $A(\rho) = -\int_0^\rho d\rho'\, B(\rho') + \underbrace{A_0}_{=0 \text{ (durch Wahl)}}$

$A^{(1)}(\rho) = -\int_0^\rho d\rho' \cdot \underbrace{\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\rho'}{R^2}}_{B^{(1)}(\rho)} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho^2}{R^2}$

$A^{(2)}(\rho) = -\int_0^R d\rho' \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\rho'}{R^2} - \int_R^\rho d\rho' \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho'}$

$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho}{R}\right)$

$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{e}_\varphi \begin{cases} \rho/R^2, & \rho < R \\ 1/\rho, & \rho > R \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{e}_z \begin{cases} \rho^2/R^2, & \rho < R \\ 1 + 2\ln(\rho/R), & \rho > R \end{cases}$

## Alternativ über die Feldgleichung

$$-\mu_0 \vec{j} = \Delta \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho}\right) \hat{e}_z$$

$$\rightarrow \quad -\mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \Theta(R-\rho) \cdot \rho = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho}\right)$$

1 $\boxed{\rho < R}$

$$-\frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \int_0^\rho d\rho' \rho' = \rho \frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho} - C_1$$

$$\Rightarrow -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\rho}{R^2} + \underbrace{\frac{C_1}{\rho}}_{=0 \text{ (wegen Endlichkeit bei 0)}} = \frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho}$$

$$\Rightarrow A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \int_0^\rho d\rho' \rho' + \underbrace{A_0}_{=0 \text{ (Wahl)}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho^2}{R^2}$$

$\boxed{\rho > R}$

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho}\right) \Rightarrow C_3 = \rho \frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho} \Rightarrow \frac{C_3}{\rho} = \frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho}$$

$$C_3 \cdot \ln\left(\frac{\rho}{C_4}\right) + C_5$$

Eingeführt aus Dimensionsgründen.

Stetigkeit:
$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho^2}{R^2}\Big|_{\rho=R} = C_3 \ln\left(\frac{\rho}{C_4}\right) + C_5 \Big|_{\rho=R}$$

$C_4 = R$

$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi} = C_5$$

Stetig Diff'bar
$$-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\rho}{R^2}\Big|_{\rho=R} = C_3 \cdot \frac{1}{\rho}\Big|_{\rho=R}$$

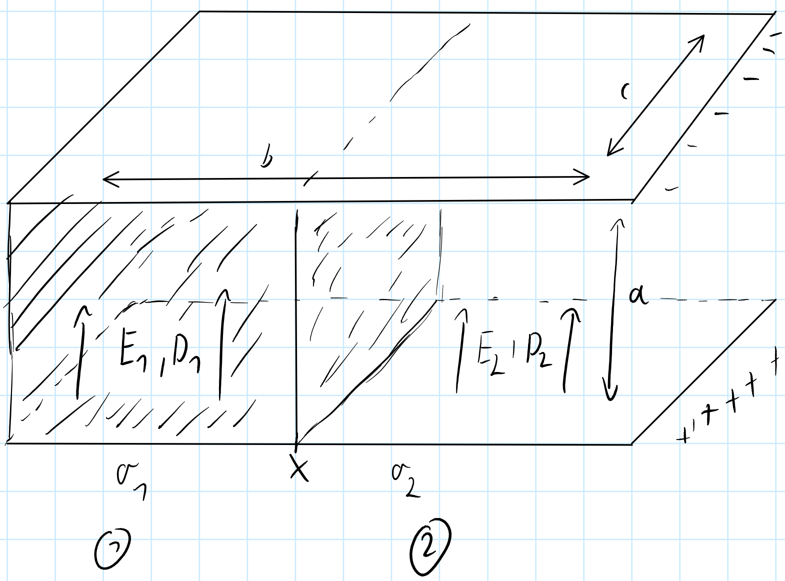
$$-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{R} = C_3 \cdot \frac{1}{R} \Rightarrow C_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} e_z \begin{cases} \rho^2/R^2, & \rho < R \\ 1 + 2\ln(\rho/R), & \rho > R \end{cases} \longrightarrow$$

$\vec{B}$-Feld durch ableiten.

# Aufgabe 2.2

Dienstag, 22. März 2016 13:14




Die Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes ist stetig (siehe VL).

~~Da das $\vec{D}$-Feld~~ $\vec{E}$-Feld an der Grenzfläche zu 1 und 2

nur eine Tangentialkomponente. $\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$

Des weiteren gilt:

$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_1 \qquad D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r' E_2$ $D_2$ ist im Vakuum. $\Rightarrow \varepsilon_r' = 1$ $\Rightarrow D_2 = E_2$

Da $E_1 = E_2$ erhalten wir als Zusammenhang

zw. $D_1 = \varepsilon D_2$

b, Aus der Vorlesung wissen wir über die Stetigkeit des

$\sigma = \vec{n} \cdot \vec{D} \,|_{Fläche}$

Daraus folgt für die Flächenladungsdichten

$\sigma_1 = D_1 \qquad \sigma_2 = D_2$

c) Gesamtladung der unteren Platte ist Q.

daher muss gelten, dass:

$$Q \overset{!}{=} \int dF\, \sigma = \sigma_1 \cdot x \cdot c + \sigma_2 \cdot (b-x) \cdot c$$

$$= c(x\varepsilon + b - x)\varepsilon_0 E_1 \quad \left( \text{Erinnerung: } \begin{matrix} \sigma_1 = D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon E_1 \\ \sigma_2 = D_2 = \varepsilon_0 E_2 = \varepsilon_0 E_1 \end{matrix} \right)$$

$$\Rightarrow E_{1/2} = \frac{Q/c}{\varepsilon_0 (x\varepsilon_r + b - x)} = \frac{Q/c}{\varepsilon_0 (b + (\varepsilon_r - 1)x)}$$

$$\Rightarrow D_1 = \frac{\varepsilon_r\, Q/c}{b + (\varepsilon_r - 1)x} \qquad D_2 = \frac{Q/c}{b + (\varepsilon_r - 1)x}$$

d elektrostatische Feldenergie

$$W(x) = \frac{1}{2} \int dV\, \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} ac \frac{Q^2/c^2}{\varepsilon_0 [b + (\varepsilon_r - 1)x]^2} (\varepsilon_x + b - x)$$

$$\Rightarrow W(x) = \frac{Q^2/a}{2c\varepsilon_0 [b + (\varepsilon - 1)x]}$$ $\Rightarrow$ Feldenergie nimmt für wachsende $x$ bei $\varepsilon_r > 1$ ab.

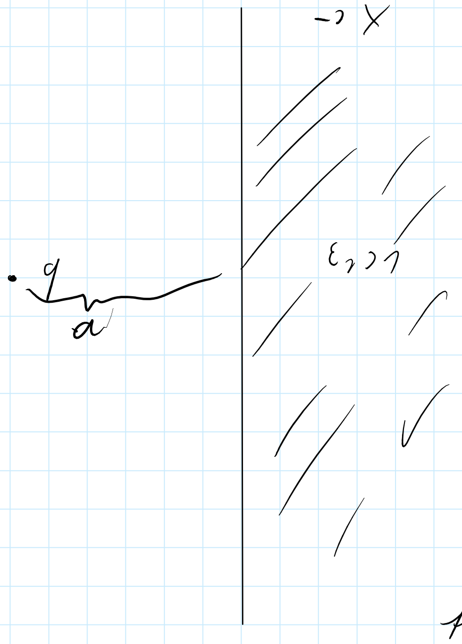
Achtung $x$ ist gegenüber dem Integral keine Variable

e Kraft mit der das Dielektrikum in den Kondensator gezogen wird. (Kraft ist die Ableitung d. Energie)

$$F = -\frac{dW(x)}{dx} = \frac{Q^2\, a(\varepsilon - 1)}{2c\varepsilon_0 [b + (\varepsilon - 1)x]^2}$$

# Aufgabe 2.3

Dienstag, 22. März 2016 09:36




1. Spiegelladung setzen mit unbekannter Ladung $q''$, da keine **Metallplatte**.
(Spiegelladung $q' = -q$ gilt nur für Metallplatten)

$\Rightarrow$ E-Feld (nur für $x<0$):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left( q \frac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|} + q' \frac{\vec{r}-a\vec{e}_x}{|\vec{r}-a\vec{e}_x|^3}\right) \quad (x<0)$$

für den rechten Halbraum müssen wir die Stärke $q'$ d. Originalladung variieren:

für $x>0$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left( q'' \frac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3}\right)$$

Nun lassen sich die Ladungen aus den Stetigkeitsbedingungen

keine freien Ladungen $\Rightarrow \sigma_{frei} = 0$
Normalkomponente bei $\vec{r} = 0$

$$\Rightarrow D_{x<0}(0) = D_{x>0}(0) \Rightarrow q - q' = q'' \quad (I)$$

$$\vec{n} \times \vec{E}_{x>0} = \vec{n} \times \vec{E}_{x<0}$$

$$\Rightarrow \vec{n} \times (\vec{r} + a\vec{e}_x)\, q + \vec{n} \times (\vec{r} - a\vec{e}_x)\, q' = \vec{n} \times (\vec{r} + a\vec{e}_x)$$

Beachte, dass gilt: $\vec{n} \times (\vec{r} \pm a\vec{e}_x)$
$= \vec{n} \times \vec{r} \pm a\, \vec{n} \times \vec{e}_x)$
$= \vec{n} \times \vec{r}$, da $\vec{n} \parallel \vec{e}_x$.

$$\Rightarrow \underbrace{E_{x<0}(\vec{r}) = E_{x>0}(\vec{r})}_{\text{für } x=0;\ \vec{r}\neq 0} \Rightarrow q + q' = \frac{q''}{\varepsilon_r} \quad (II)$$

Nun haben wir 2 Gleichungen für 2 unbekannte, woraus wir $q'$ und $q''$ berechnen können.

$$(II)^*: \quad q+q' = \frac{q''}{\varepsilon_r} \Rightarrow q'' = \varepsilon_r(q+q')$$

$$(I) = (II)^* \quad (q+q')\varepsilon_r = q-q' \quad \text{auflösen nach } q':$$

$$q' = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} q$$

und daraus: $q'' = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} q$

Polarisations-Flächenladungsdichte:

$$\sigma_{pol} = -\vec{P}_{x>0} \cdot \vec{e}_x \big|_{x=0} \qquad \vec{P}_{x<0} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \stackrel{!}{=} \varepsilon_0(\varepsilon-1)\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{x>0} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(q'' \frac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} q \frac{\vec{r}+a\vec{e}_x}{|\vec{r}+a\vec{e}_x|^3}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{ind} = -\vec{P}_{x>0} \cdot \vec{e}_x \big|_{x=0} = \frac{1-\varepsilon}{2\pi\varepsilon+1} q \frac{a}{(y^2+z^2+a^2)^{3/2}}$$