a) Homogen geladenes Hohlrohr

(i) $\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{(R_a^2 - R_i^2)\pi h} \Theta\left(\frac{h}{2} - |z|\right) \Theta(\rho - R_i) \Theta(R_a - \rho)$

(ii) $q_{ges} = \underbrace{\int_0^\infty \rho \, d\rho \; \Theta(\rho - R_i) \Theta(R_a - \rho)}_{= \frac{R_a^2}{2} - \frac{R_i^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \; \Theta\left(\frac{h}{2} - |z|\right)}_{= h} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{= 2\pi} \frac{Q}{(R_a^2 - R_i^2)\pi h}$

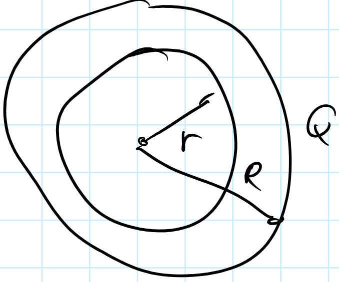
$= Q$ ✓

b) Homogen geladene Kugel

(i) $\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Theta(R - r) = \frac{3Q}{4\pi R^3} \Theta(R - r)$

(ii) $q_{ges} = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{3Q}{4\pi R^2} = Q$ ✓

(iii) Gaußscher Satz $\quad \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \hat{e}_r$ (Symmetrie)



$$\oint\!\!\!\oint_{F = \partial V} d\vec{F} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r r'^2 dr' \int d\Omega \, \frac{3Q}{4\pi R^3} \Theta(R - r')$$

Kugeloberfläche: $d\vec{F} = r^2 d\Omega \cdot \hat{e}_r$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_0^r dr' \, r'^2 \, \frac{3Q}{4\pi R^3} \Theta(R - r')$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3 r^2}\int_0^r dr' \, r'^2 \, \Theta(R-r')$$

$\boxed{r>R}$

$$E(r) = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3 r^2}\underbrace{\int_0^R dr' \cdot r'^2}_{R^3/3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\boxed{r>R}$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{3Q}{R^3}\overbrace{\int_0^r dr' \cdot r'^2}^{r^3/3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \hat{e}_r \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} r/R^3 & , \ r<R \\ 1/r^2 & , \ r>R \end{cases}$$

c) Homogen geladene Kugeloberfläche

(i) $\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\delta(r-R)$

(ii) $q_{ges} = \underbrace{\int_0^\infty r^2 dr \ \delta(r-R)\cdot\frac{1}{r^2}}_{=1}\underbrace{\int d\Omega}_{=4\pi}\frac{Q}{4\pi} = Q$ ✓

(iii) $\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2}\left[\delta(r-R_a) - \delta(r-R_i)\right]$

Gaußscher Satz

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int dV' \rho(\vec{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases} 0 & , \ r<R_i \\ -Q & , \ R_i<r<R_a \\ 0 & , \ r>R_a \end{cases}$$

↳ Endliches Volumen mit r

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\Theta(r-R_i)\,\Theta(R_a-r)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \Rightarrow E(r) = -\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \Phi(r) = -\int_\infty^r dr'\, E(r')$$

$$\Phi(R_a) = -\int_\infty^{R_a} dr'\, E(r') = 0$$

$$\Phi(R_i) = -\int_\infty^{R_i} dr'\, E(r') = -\int_{R_a}^{R_i} \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\,dr' = \left.\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right|_{R_a}^{R_i}$$

$$= \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right)$$

$$U = \Delta\Phi = \Phi(R_a) - \Phi(R_i) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{R_a R_i}{R_a - R_i}$$

d) Homogen gel. Kreisscheibe

(i) $\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{R^2\pi}\,\delta(z)\,\Theta(R-\rho)$

(ii) $q_{ges} = \underbrace{\int_0^\infty \rho\, d\rho\, \Theta(R-\rho)}_{=R^2/2}\,\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \delta(z)}_{=1}\,\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\,\frac{Q}{R^2\pi} = Q$ ✓

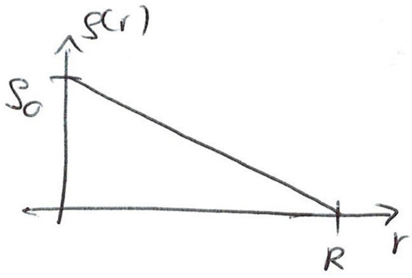
(iii) $\vec{p} = \int d^3r'\;\vec{r}'\rho(\vec{r}')$ $\qquad \vec{r}' = \rho'\hat{e}_{\rho'} + z'\hat{e}_{z'}$

$$= \frac{Q}{R^2\pi} \int_0^\infty \varrho' \, d\varrho' \int_{-\infty}^{\infty} dz \, \delta(z) \int_0^{2\pi} d\varphi' \left[\varrho' \hat{e}_{\varrho'} + z' \hat{e}_{z'} \right] = \vec{0}$$

da $\int_0^{2\pi} d\varphi' e_{\varrho'} = \int_0^{2\pi} d\varphi' \begin{pmatrix} \cos\varphi' \\ \sin\varphi' \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

und $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) \cdot z = 0$

Ansatz für Ladungsdichte



e) (i) $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \Theta(R-r)$

Linearer Abfall

Gesamtladung ist Q

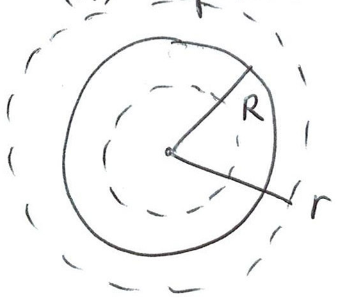
$$Q = \int d^3r \; \rho(r) = \underbrace{\int d\Omega}_{4\pi} \int_0^\infty dr \, r^2 \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \Theta(R-r)$$

$$= 4\pi \rho_0 \int_0^R dr \, r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right) = 4\pi \rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4R}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \rho_0 R^3 \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \frac{3Q}{\pi R^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(r) = \frac{3Q}{\pi R^4} (R-r) \, \Theta(R-r)}$$

(ii) Sphärische Symmetrie $\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \, \hat{e}_r$



Gaußsche Kugeloberfläche mit

$$d\vec{F} = r^2 d\Omega \, \hat{e}_r$$

Gauß'scher Satz

$$\oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\vec{r}')$$

$$\rightarrow \int d\Omega \, r^2 E(r) = 4\pi r^2 E(r) \overset{!}{=} \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_0^r dr' \, r'^2 \rho(r')$$

$\boxed{r > R}$ $\quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$

$\boxed{r < R}$ $\quad E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2} \frac{3Q}{\pi R^4} \int_0^r dr' \, r'^2 (R - r')$

$$= \frac{3Q}{\pi \varepsilon_0 R^4} \frac{1}{r^2} \left(\frac{Rr^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^4} (4Rr - 3r^2)$$

(iii) Energie zum Aufladen $\hat{=}$ Feldenergie

$$W = \int d^3r \; w(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} 4\pi \int_0^\infty dr \; r^2 \; E(r)^2$$

Bereiche aufteilen

$$\overset{\downarrow}{=} 4\pi \; \frac{\varepsilon_0}{2} \; \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \left\{ \int_0^R dr \, r^2 \; \frac{(4Rr-3r^2)^2}{R^8} + \int_R^\infty dr \; r^2 \; \frac{1}{r^4} \right\}$$

<u>Substitution</u>: $r = sR \qquad dr = R\,ds$ (oder Polynome integrieren)

$$\Rightarrow W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \; \frac{1}{R} \left\{ \underbrace{\int_0^1 ds \; s^2 \; (4s-3s^2)^2}_{17/35} + \underbrace{\int_1^\infty ds \; \frac{1}{s^2}}_{-\frac{1}{s}\big|_1^\infty \; = \; +1} \right\}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \; \frac{1}{R} \cdot \frac{52}{35} = \underline{\underline{\frac{13\,Q^2}{70\pi\varepsilon_0 R}}}$$

Aufgabe 1.2

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\exp(-\frac{2r}{a_0})}{r}\left(1+\frac{r}{a_0}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\underbrace{\frac{\exp(-2r/a_0)(1+r/a_0)-1}{r}}_{\text{regulär}} + \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{singulär}}\right)$$

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\, \delta^3(\vec{r})$$

a) Poisson-Gleichung $\quad \rho(\vec{r}) = -\varepsilon_0 \cdot \Delta\Phi(\vec{r})$

$$= \frac{q}{4\pi}\left(-4\pi\,\delta^3(\vec{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\exp(-\tfrac{2r}{a_0})(1+\tfrac{r}{a_0})-1\right)\right)$$

$$= \ldots = q\left(\underbrace{\delta^3(\vec{r})}_{\substack{\text{proton} \\ \text{(punktförmig)}}} - \underbrace{\frac{\exp(-2r/a_0)}{\pi\cdot a_0^3}}_{\text{elektronenwolke}}\right)$$

b) Gesamtladung

$$Q_{tot} = \int d^3r'\, \rho(\vec{r}) = q\left[\int \delta^3(\vec{r})\, d^3r - \int d\Omega \int_0^\infty \frac{\exp(-2r/a_0)}{\pi a_0^3} r^2\, dr\right.$$

$$= q - \frac{4q}{a_0^3}\int_0^\infty r^2 \exp(-\tfrac{2r}{a_0})\, dr$$

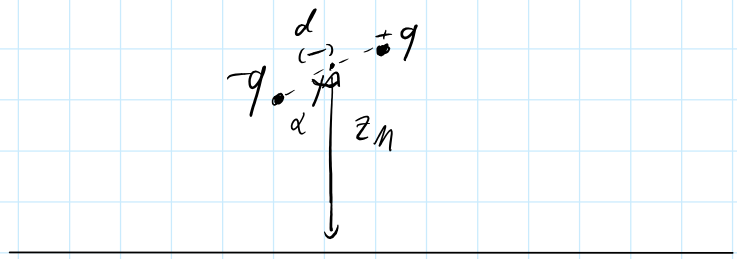
Trick: $\displaystyle\int_0^\infty r^2 \exp(-\alpha r)\, dr = \int_0^\infty dr\, \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\exp(-\alpha r) = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int_0^\infty dr\, \exp(-\alpha r)$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left[-\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha r)\right]_0^\infty = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left[\frac{1}{\alpha}\right] = \frac{2}{\alpha^3},$$

Hier: $\quad \alpha = \frac{2}{a_0} \quad \Rightarrow \quad Q_{tot} = q - \frac{4q}{a_0^3}\cdot 2 \cdot \frac{a_0^3}{8} = 0 \quad ✓$

Aufgabe 1.3

Montag, 21. März 2016 13:01



$$\vec r_q = \begin{pmatrix} \frac{d}{2}\sin\alpha \\ 0 \\ z_n + \frac{d}{2}\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec r_{-q} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin\alpha \\ 0 \\ -z_n - \frac{d}{2}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec r'_q = \begin{pmatrix} d/2\ \sin\alpha \\ 0 \\ -z_n - \frac{d}{2}\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec r'_{q} \begin{pmatrix} -d/2\ \sin\alpha \\ 0 \\ -z_n + \frac{d}{2}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

a Bedingungen:

$$\Delta\phi(\vec r) = \frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0} \qquad \rho(\vec r) = q\,\delta(\vec r - \vec r_q) - q\,\delta(\vec r - \vec r_{-q})$$

Randbedingungen $\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{z=0} = 0$

b Potential: Einfach Potential für 4 Punktladungen

$$\Rightarrow \phi(\vec r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec r - \vec r_q|} - \frac{1}{|\vec r - \vec r_{-q}|} - \frac{1}{|\vec r - \vec r_q'|} + \frac{1}{|\vec r - \vec r'_{-q}|}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{((x - \frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z - z_n - \frac{d}{2}\cos\alpha)^2)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$- \frac{1}{((x - \frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z - z_n + \frac{d}{2}\cos\alpha)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \frac{1}{\left(\left(x - \frac{d}{2}\sin\alpha\right)^2 + y^2 + \left(z + z_n + \frac{d}{2}\cos\alpha\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{1}{\left(\left(x + \frac{d}{2}\sin\alpha\right)^2 + y^2 + \left(z + z_n - \frac{d}{2}\cos\alpha\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \Bigg)$$

(Nicht ableiten wir wissen das $\vec{E}$ Feld für 4 Punktladungen)

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\,\phi(|\vec{r}|) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_{-q}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-q}|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'_q}{|\vec{r}-\vec{r}\,'_q|^3} + \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'_{-q}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'_{-q}|^3}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg(\frac{\left(x - \frac{d}{2}\sin\alpha\right)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \left(z - z_n - \frac{d}{2}\cos\alpha\right)\vec{e}_z}{\left[\left(x - \frac{d}{2}\sin\alpha\right)^2 + y^2 + \left(z - z_n - \frac{d}{2}\cos\alpha\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$- \frac{\left(x + \frac{d}{2}\sin\alpha\right)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \left(z - z_n + \frac{d}{2}\cos\alpha\right)\vec{e}_z}{\left[\left(x + \frac{d}{2}\sin\alpha\right)^2 + y^2 + \left(z - z_n + \frac{d}{2}\cos\alpha\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$- \frac{\left(x - \frac{d}{2}\sin\alpha\right)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \left(z + z_n + \frac{d}{2}\cos\alpha\right)\vec{e}_z}{\left[\left(x - \frac{d}{2}\sin\alpha\right)^2 + y^2 + \left(z + z_n + \frac{d}{2}\cos\alpha\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$- \frac{\left(x + \frac{d}{2}\sin\alpha\right)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + \left(z + z_n - \frac{d}{2}\cos\alpha\right)\vec{e}_z}{\left[\left(x + \frac{d}{2}\sin\alpha\right)^2 + y^2 + \left(z + z_n - \frac{d}{2}\cos\alpha\right)^2\right]^{3/2}}\Bigg)$$

c) $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}(z = 0^+) =$

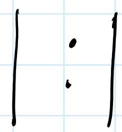
$$= \frac{q}{2\pi}\Bigg(-\frac{z_n + \frac{d}{2}\cos\alpha}{\left[\left(x - \frac{d}{2}\sin\alpha\right)^2 + y^2 + \left(z_n + \frac{d}{2}\cos\alpha\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$+ \frac{z_n - \frac{d}{2}\cos\alpha}{\left[\left(x + \frac{d}{2}\sin\alpha\right)^2 + y^2 + \left(z_n - \frac{d}{2}\cos\alpha\right)^2\right]^{3/2}}$$

Das E-Feld wurde hier komplett berechnet, da explizit danach gefragt wurde. Für die influenzierte Flächenladungsdichte reicht es $E(x,y,0) = -\operatorname{grad}\phi|_{z=0}$

zu berechnen.

d ∞ da

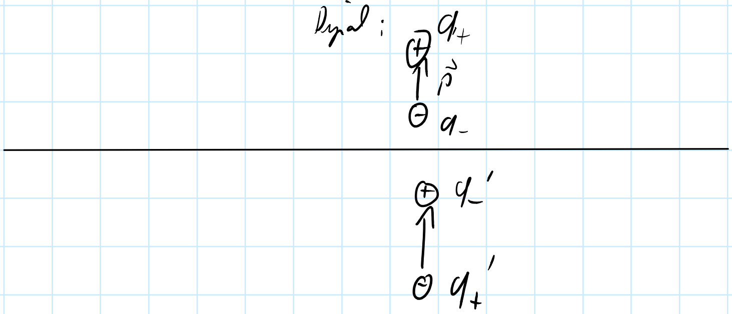


$\leftarrow$ unendlich Bildladungen, da jede an der gegenüberliegenden Platte noch einmal gespiegelt wird.

Dieses Problem ergibt eine unendliche Reihe an Bildladungen deren Potential analytisch errechenbar ist

Aufgabe 1.4

Montag, 21. März 2016 13:52



$\Rightarrow$ Spiegeldipol $\vec{p}' = (0, 0, p)$ an Punkt $\vec{a}' = -\vec{a} = (0, 0, -a)$

Daraus folgt mit dem Standardpotential für das Dipol mit dem Superpositionsprinzip

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} + \frac{\vec{p}'(\vec{r} - \vec{a}')}{|\vec{r} - \vec{a}'|^3} \right\}$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}} + \frac{z+a}{[x^2+y^2+(z+a)^2]^{3/2}} \right\}$$

Überprüfe Bedingung $\phi = 0$ auf Platte.

$$\phi(x,y,0) = p \left\{ \frac{-a}{[x^2+y^2+a^2]^{3/2}} + \frac{a}{[x^2+y^2+a^2]^{3/2}} \right\} = 0 \checkmark$$

b) Influenzierte Flächenladungsdichte auf der Metallplatte

$\sigma = \varepsilon_0 \vec{n} \cdot \vec{E}|_{Fläche}$ $\qquad \vec{n} = \vec{e}_z$ trivial

$$\Rightarrow \sigma(x,y) = \varepsilon_0 E_z(x,y,0)$$

$$= -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} \phi(x,y,z)|_{z=0}$$

Zwischenrechnung:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{z\pm a}{[x^2+y^2+(z\pm a)^2]^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{[x^2+y^2+(z\pm a)^2]^{5/2}} + \frac{-\frac{3}{2}\cdot 2\cdot(z\pm a)(z\pm a)}{[x^2+y^2+(z\pm a)^2]^{5/2}}$$

$$= \frac{x^2+y^2-2(z\pm a)^2}{[x^2+y^2+(z\pm a)^2]^{5/2}}$$

Eingesetzt ergibt das für die Flächenladungsdichte

$$\sigma(x,y) = \frac{-p}{4\pi}\frac{x^2+y^2-2a^2}{[x^2+y^2+a^2]^{5/2}}\cdot(2)$$

Beide Terme im Potential haben selbe Ableitung

c

Zur Lösung dieser Aufgabe existieren 3 Möglichkeiten:

1. Verwende die Dipol-Dipol Wechselwirkung:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\vec p\cdot\vec p\,'}{|\vec r|^3} - \frac{3(\vec p\cdot\vec r)(\vec p\,'\cdot\vec r)}{|\vec r|^5}\right\}$$

$\vec r$ ist hier der Abstand zwischen Dipol und Spiegeldipol, also $\underline{\underline{2}}\, a\cdot\vec e_z$ des weiteren $\vec p = \vec p\,'$

Die Kraft erhält man dann aus der Ableitung nach $\vec r$ der WW.

$$\Rightarrow \vec F = -\vec e_z\frac{\partial}{\partial|\vec r|}W_{12} = -\vec e_z\frac{\partial}{\partial(2a)}W_{12} = \vec e_z\frac{p^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{-3}{(2a)^4}$$

$$= -\vec e_z\frac{3p^2}{32\pi\varepsilon_0 a^4}$$

Man kann die Kraft auch direkt aus den Kräften zu den Ladungen und deren Spiegelladungen:

$$\vec{F} = \vec{e}_z \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{-1}{4a^2}}_{q_+ \text{ mit } q_+'} \underbrace{-\frac{1}{4(a+\delta)^2}}_{q_- \text{ mit } q_-'} + \underbrace{\frac{(-1)^2}{(2a+\delta)^2}}_{q_- \text{ mit } q_+'} + \underbrace{\frac{1}{(2a+\delta)^2}}_{q_+ \text{ mit } q_-'}\right]$$

wobei δ der Abstand zu den Ladungen des Dipols ist.

Entwickle für kleine δ bis zu $O(\delta^2)$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 + O(x^3):$$

$$\vec{F} = \vec{e}_z \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left[-1 - \left(1+\frac{\delta}{a}\right)^{-2} + 2\left(1+\frac{\delta}{2a}\right)^{-2}\right]$$

$$= \vec{e}_z \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left[-1 - 1 + 2\frac{\delta}{a} - 3\left(\delta/a\right)^2 + 2 - 4\frac{\delta}{2a} + 6\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 + \dots\right]$$

$$= \vec{e}_z \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\frac{\delta^2}{a^2}\left(\frac{3}{2} - 3\right)\right] + O(\delta^3)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{e}_z \frac{3p^2}{32\pi\varepsilon_0 a^4}$$