Ferienkurs zur Theoretischen Physik II

21. März - 24. März 2016

Philipp Landgraf, Franz Zimma

Übungsblatt 1

Elektrostatik im Vakuum

Aufgabe 1.1: Gemischte Elektrostatik ....

Wir betrachten im Folgenden geladene Objekte mit Zentrum (bzw. Schwerpunkt) bei $\vec{0}$. Wir interessieren uns für verschiedene physikalische Größen im gesamten Raum. Wählen Sie für jedes Problem ein geeignetes Koordinatensystem und nutzen Sie Symmetrien. Alle angegebenen Größen sind zeitlich konstant.

(a) Ein Hohlrohr mit Höhe h, Innenradius R_i und Außenradius R_a ist homogen geladen mit Q.
  i. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an.
  ii. Überprüfen Sie den Betrag der Gesamtladung.

(b) Eine (Voll-)Kugel mit Radius R ist homogen geladen mit Q.
  i. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an.
  ii. Überprüfen Sie den Betrag der Gesamtladung.
  iii. Berechnen Sie das $\vec{E}$-Feld dieser Konfiguration.

(c) Eine (unendlich dünne) Kugeloberfläche mit Radius R_a ist homogen geladen mit Q.
  i. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an.
  ii. Überprüfen Sie den Betrag der Gesamtladung.
  iii. Konzentrisch zu dieser Oberfläche wird nun eine weitere Kugeloberfläche mit $R_i < R_a$ und $-Q$ eingebracht. Berechnen Sie die Kapazität $C = Q/U$ dieses „Kugelkondensators“, wobei U die Potentialdifferenz zwischen den Schalen ist.

(d) Eine (unendlich dünne) Kreisscheibe mit Radius R ist homogen geladen mit Q.
  i. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ an.
  ii. Überprüfen Sie den Betrag der Gesamtladung.
  iii. Berechnen Sie das Dipolmoment $\vec{p}$ dieser Konfiguration.

(e) Innerhalb einer Kugel vom Radius R fällt die Ladungsdichte $\rho(r)$ vom Mittelpunkt bis zm Kugelrand hin linear auf den Wert Null ab. Die Gesamtladung in der Kugel beträgt Q.
  i. Geben Sie die radialsymmetrische Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ausgedrückt durch Q und R und stellen Sie sicher, dass der Betrag der Gesamtladung Q ist.
  ii. Berechnen Sie für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{e}_r$ die r-abhängige Feldstärke $E(r)$.
  iii. Welche Arbeit W musste aufgewendet werden, um die Kugel mit der vorgebenen Ladungsverteilung aufzuladen?
  Hinweis: Substituieren Sie $r = sR$ im Integral über die Energiedichte $w = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$.

Aufgabe 1.2: Wasserstoffatom ....

Das elektrostatische Potential eines Wasserstoffatoms ist

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)}{r} \left(1 + \frac{r}{a_0}\right),$$

wobei q der Betrag der Elektronenladung und a_0 der Bohrsche Radius ist.

(a) Bestimmen Sie die zugehörige Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$.

(b) Verifizieren Sie, dass die Gesamtladung wirklich 0 ist.

Hinweis: Spalten Sie den singulären Term $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ ab.

Aufgabe 1.3: Doppelkopf ....

In den Übungen wurden bereits das Potential Φ und das $\vec{E}$-Feld einer Punktladung vor einer Metallplatte berechnet. Diese Aufgabe ist wesentlich komplizierter.
Berechnen Sie das Potential und das elektrische Feld im Bereich $z > 0$ von 2 Ladungen vor einer Metallplatte bei $z = 0$. Die beiden Ladungen sind starr im Abstand d verbunden und tragen die Ladungen q und $-q$. Der Mittelpunkt befindet sich im Abstand $z_M > \frac{d}{2}$ zur Plattenoberfläche. Die Verbindungsachse der Punktladungen steht im Winkel α zur Oberflächennormale.

(a) Geben Sie alle Bedingungen an, die das elektrostatische Potenzial $\Phi(\vec{r}$ im Bereich $z > 0$ erfüllen muss.

(b) Berechnen Sie das Potential und das elektrische Feld für $z > 0$ mit Hilfe der Bildladungsmethode.

(c) Berechnen sie die induzierte Oberflächenladungsdichte σ

(d) Noch komplizierter: Geben sie die Anzahl an Bildladungen an die benötigt werden, wenn man die zwei Ladungen zwischen zwei parallele Platten legt.

Aufgabe 1.4: Spiegeldipol ....

Ein elektrischer Dipol $\vec{p} = (0, 0, p)$ befindet sich am Punkt $\vec{a} = (0, 0, a)$ (mit $a > 0$) über einer in der xy-Ebene liegenden, geerdeten Platte.

(a) Bestimmen Sie unter Verwendung der Spiegelladungsmethode das Potential $\Phi(\vec{r})$ im oberen Halbraum $z > 0$ zur Randbedingung, dass es auf der Metallplatte $z = 0$ verschwindet. Überprüfen Sie diese Randbedingung explizit.
Hinweis: Das Potential eines elektrischen Dipols $\vec{p}$ am Ursprung lautet:

$$\Phi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|^3}$$

(b) Berechnen Sie die auf der Metallplatte influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$.

(c) Berechnen Sie die Kraft $\sim \hat{e}_z$, die auf den Dipol wirkt. Stellen Sie hierzu den Dipol durch zwei entgegengesetzte Punktladungen $\pm q$ mit sehr kleinem Abstand δ dar, so dass $p = q\delta$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Taylorentwicklung

$$(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$